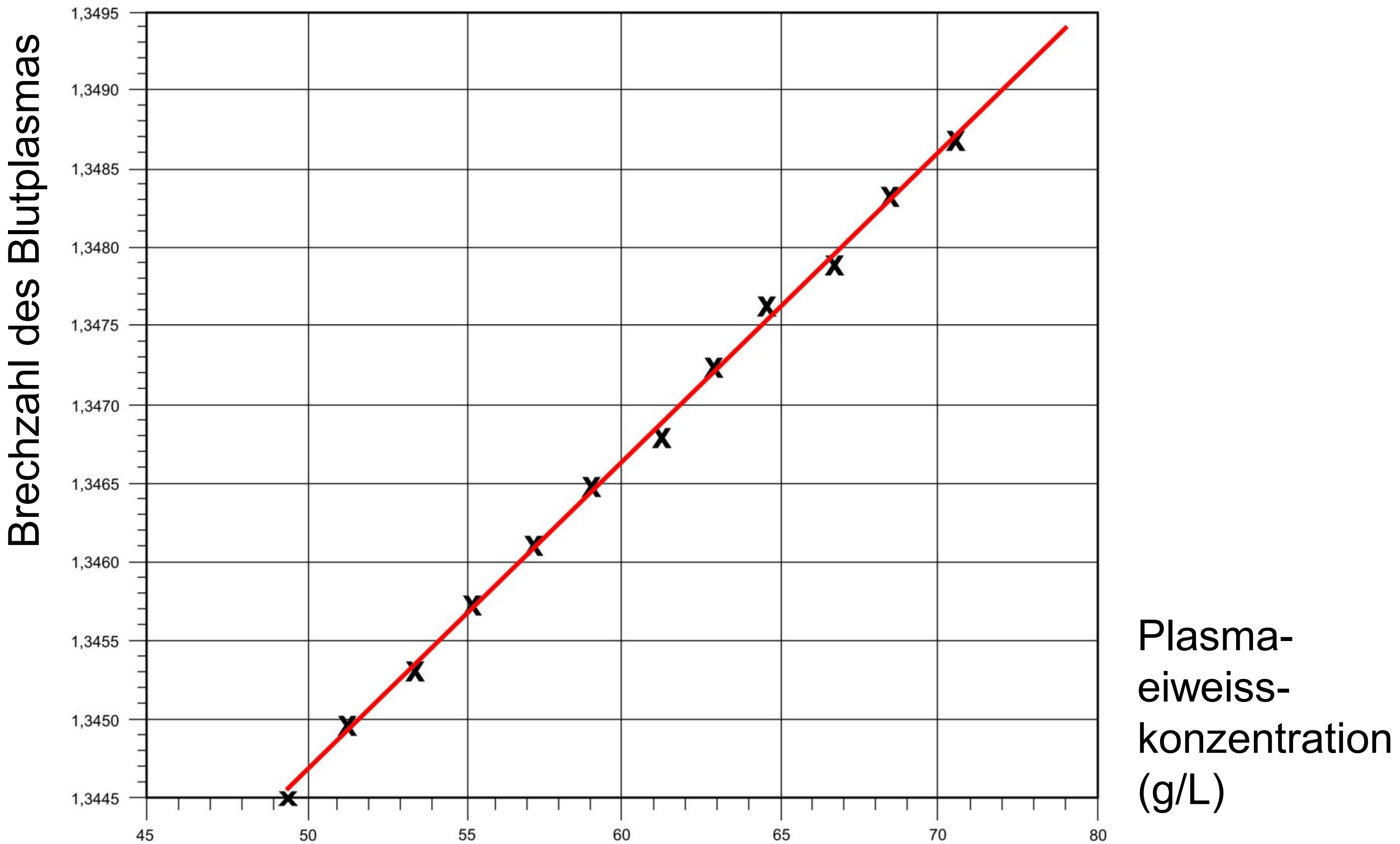
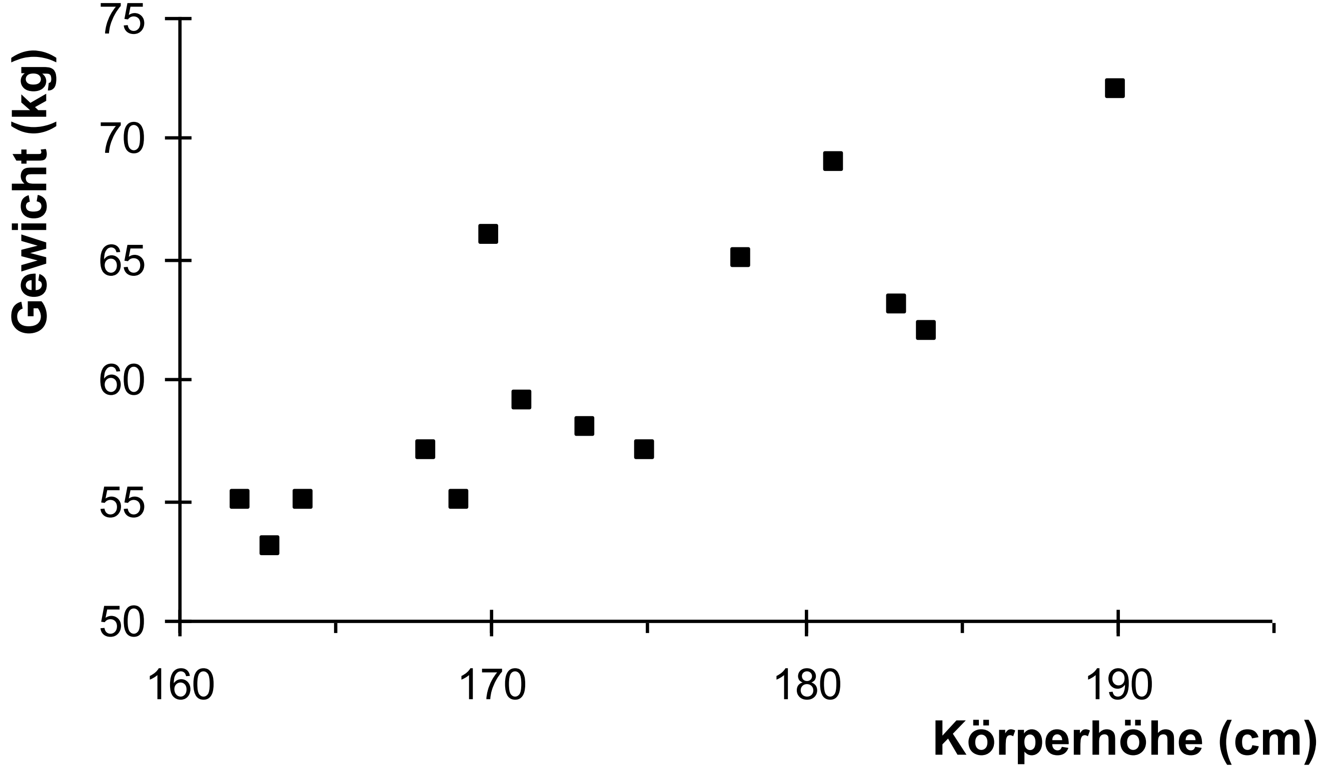
Korrelation

Gibt es ein Zusammenhang?


Brechzahl des Blutplasmas
1,3495
1,3490
1,3485
1,3480
1,3475
1,3470
1,3465
1,3460
1,3455
1,3450
1,3445
45
50
55
60
65
70
80
Plasma-
eiweiss-
konzentration
(g/L)

Daten aus einer Studentengruppe E2 (Sept. 1994) (zusammengehörige Wertepaare)



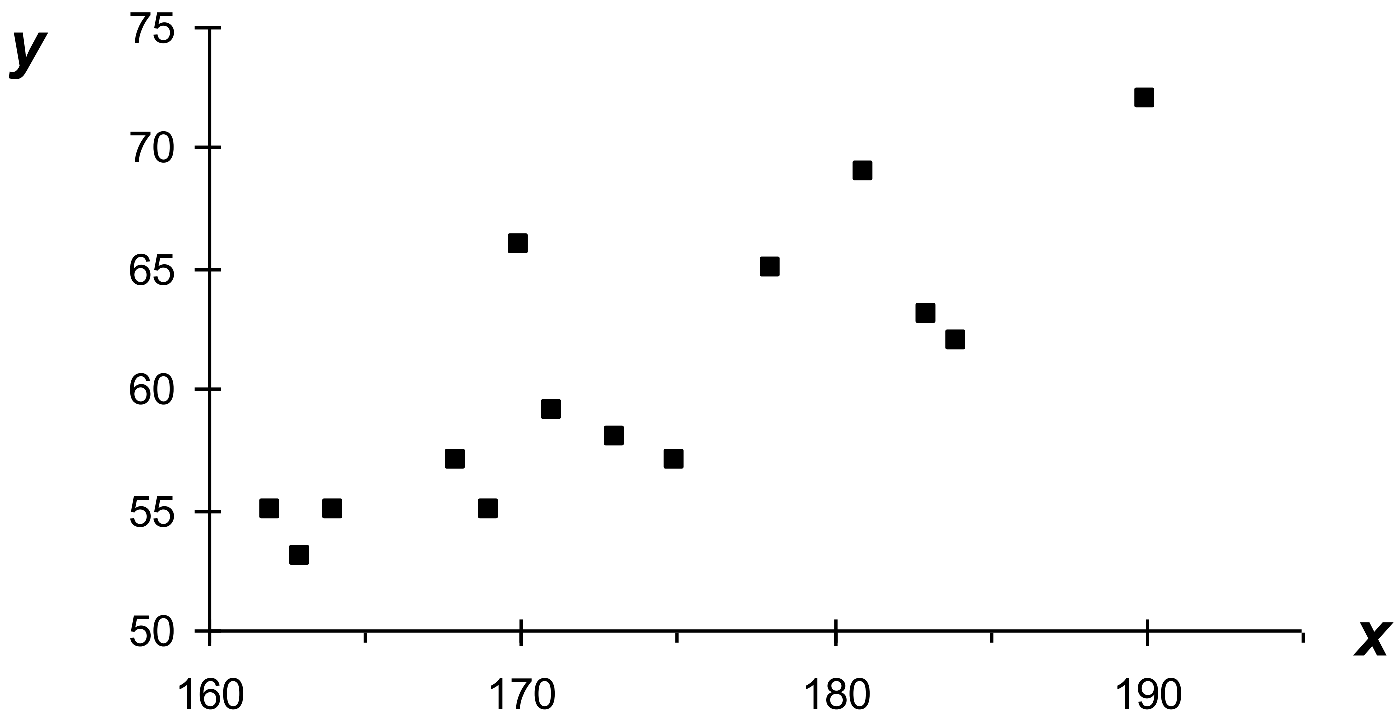
cm	kg
162	55
163	53
164	55
168	57
169	55
170	66
171	59
173	58
175	57
178	65
181	69
183	63
184	62
190	72

was für eine Tendenz kann man bemerken?

Die Korrelationsrechnung beschäftigt sich mit dem symmetrischen Zusammenhang zweier Zufallsgrössen

positive Korrelation: je mehr, desto mehr

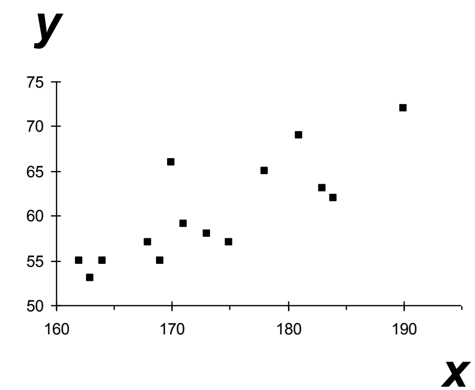
negative Korrelation:je mehr, desto weniger



hier: positive Korrelation

Ergänzungsmaterial

Regressionsannäherung



Sucht man einen Funktionszusammenhang zwischen einer (oder mehreren) unabhängigen Variable (x) und einer abhängigen Variable (y)

Voraussetzungen:

x und y numerische und stetige Merkmale,

y Zufallsgrösse (ihre Grösse wird nicht nur von der unabhängigen Variable, sondern durch den Zufall beeinflusst)

(a: Steigung, b: Achsenabschnitt)

Regressionsmodell fixiert den Typ der Funktion:

lineare F.	$y = (ax + b) + h$
polinomiale F.	$y = a + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + h$
exponentiale F.	$y = ab^x\, h$
Potenzfunktion	$y = ax^b\, h$

und wie wirkt der Zufall auf die abhängige Variable

additiver Fehler ($+ h$) oder multiplikativer Fehler ($\cdot h$)

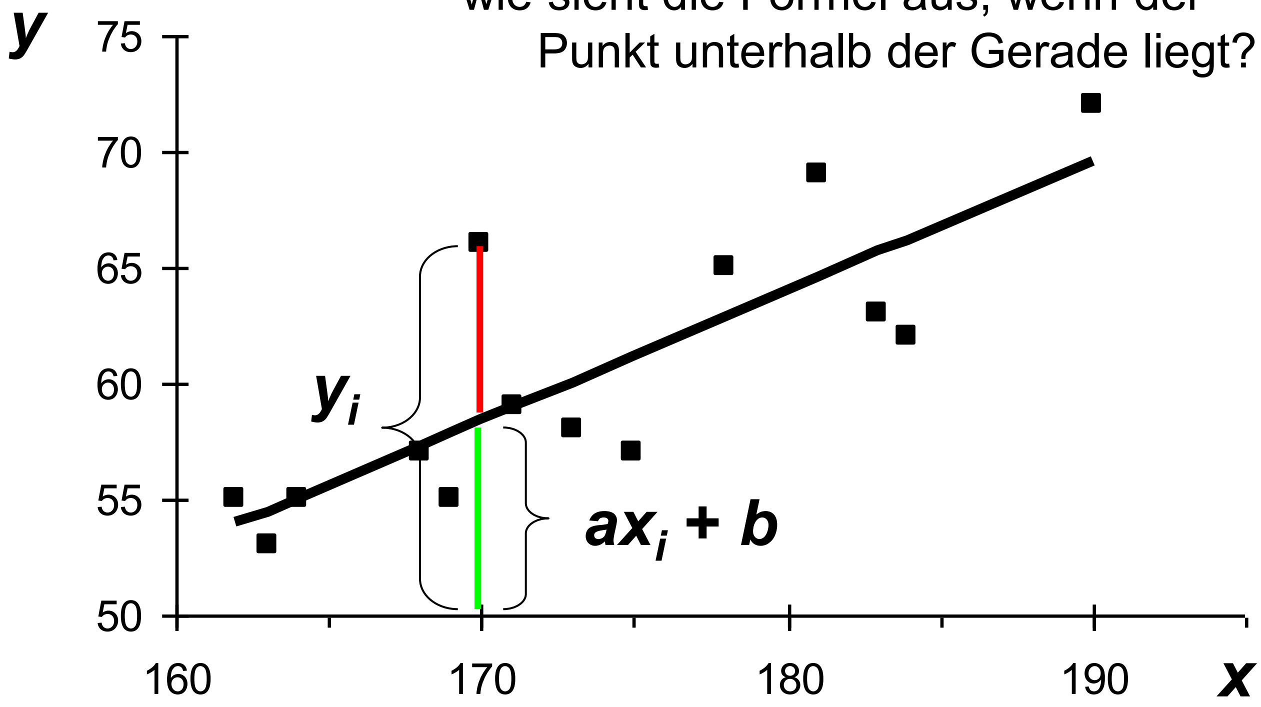
Das einfachste Regressionsmodell: lineare Regression

lineare Funktion: $y = (ax + b) + h$

$h_i = y_i - (ax_i + b)$

wenn der Punkt (x_i, y_i) oberhalb der Gerade liegt

wie sieht die Formel aus, wenn der Punkt unterhalb der Gerade liegt?



	x_i	y_i
1	162	55
2	163	53
3	164	55
4	168	57
5	169	55
6	170	66
7	171	59
8	173	58
9	175	57
10	178	65
11	181	69
12	183	63
13	184	62
14	190	72

Beste Gerade: Summe der Fehlerquadrate ist minimal (Methode der kleinsten Quadraten)

Ergänzungsmaterial

„Die beste" Steigung:

$(y = ax + b)$

$$\boxed{a^* = \frac{Q_{xy}}{Q_{xx}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

oder $a^* = \dfrac{s_{xy}^2}{s_x^2}$

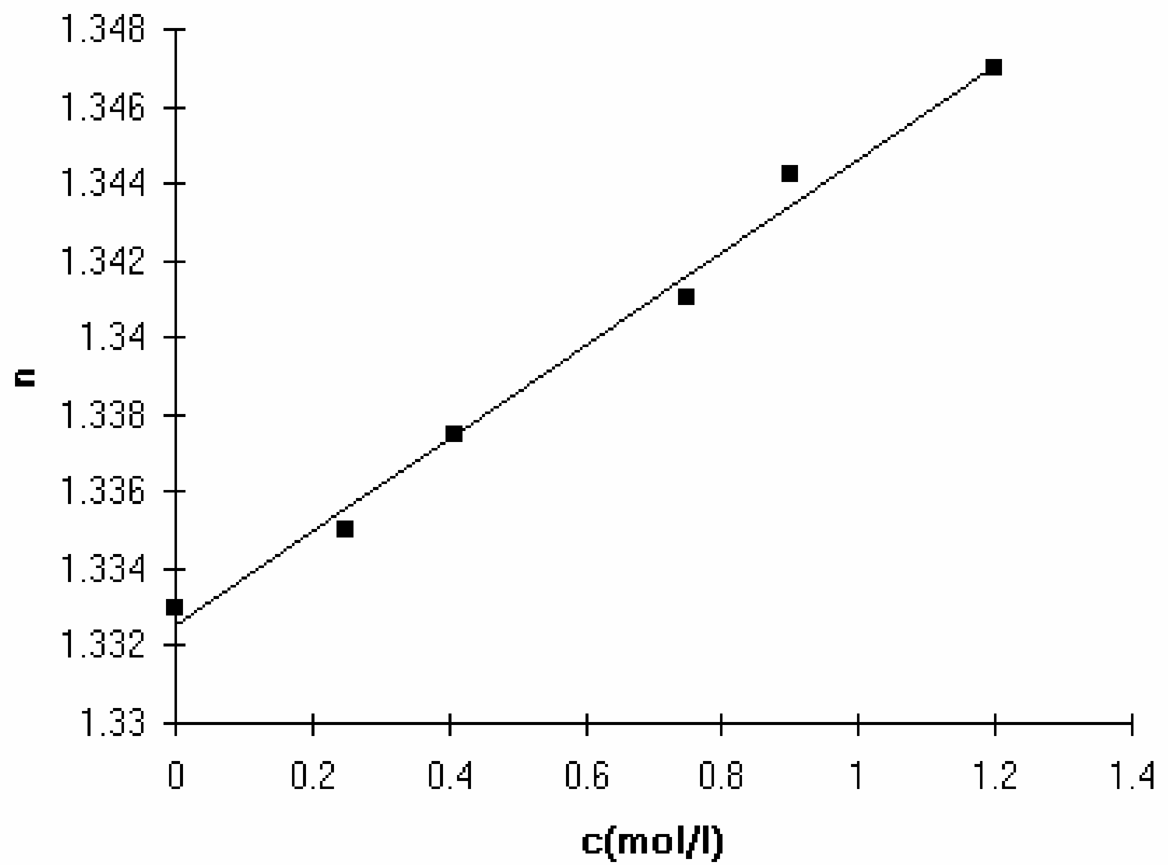
„Der beste" Achsenabschnitt:

$$\boxed{b^* = \bar{y} - a^* \cdot \bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a^* \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

wo $s_{xy}^2 = \dfrac{Q_{xy}}{n-1}$: **Kovarianz**

Beispiel: Refraktometrie

	A	B	C
1–7	unbekannte	Konzentration	Brechzahl
8	i	c (mol/l)	n
9		0	1.333
10		0.25	1.3350
11		0.41	1.3375
12		0.75	1.3410
13		0.90	1.3442
14		1.20	1.3470
15	4	0.19	1.3348
16	10	1.13	1.3462
17	n=ac+n0		
18	n0=	1.3325	
19	a=	0.0121	
20	r=	0.995	



Wie gut passen die Messpunkte an die Regressionsgerade?

Korrelationsrechnung beschreibt die lineare Beziehung zwischen zwei oder mehr statistischen Variablen

es beschreibt die Stärke der Korrelation
es gibt starke und schwache Korrelation

Korrelationskoeffizient (Pearson)

$$\boxed{r = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_{xx} \cdot Q_{yy}}} = \frac{s_{xy}^2}{s_x s_y}}$$

der Zähler ist gleich dem Zähler der Steigung der Regressionsgerade (der Nenner ist im beiden Fall positiv)

$$a^* = \frac{Q_{xy}}{Q_{xx}} \Rightarrow$$

positive Steigung: *r* ist positive Zahl
negative Steigung: *r* ist negative Zahl

$$-1 \leq r \leq 1$$

weitere Bemerkungen:

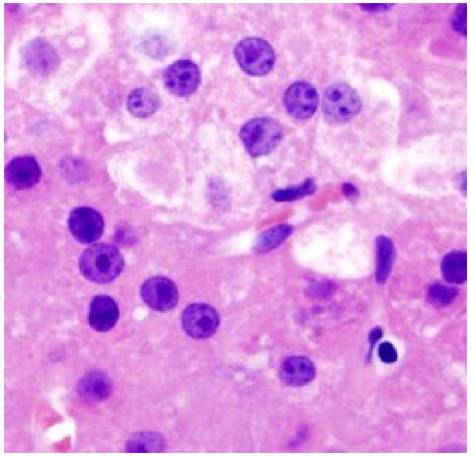
$$-1 \leq r \leq 1$$

Korrelationskoeffizient
(Pearson)

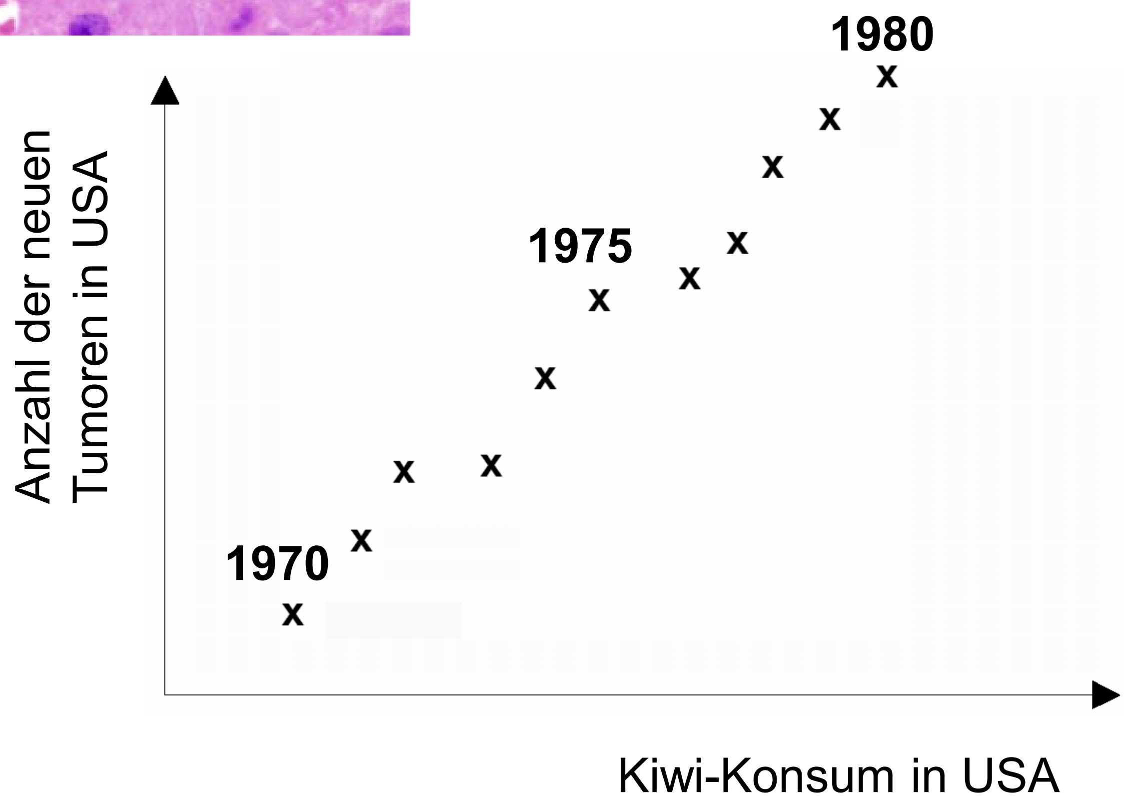
$$0 \leq r^2 \leq 1$$

Bestimmtheitsmass
(coefficient of determination)

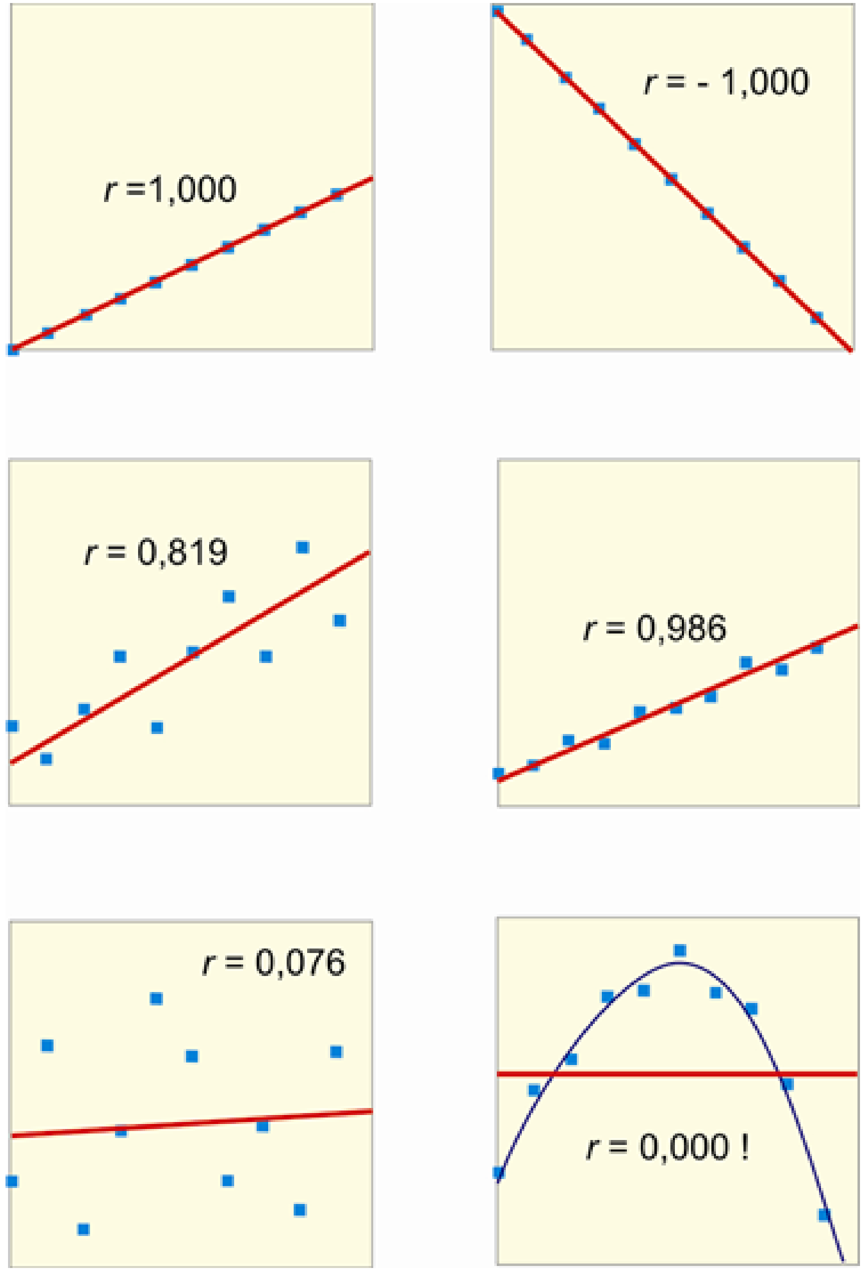
Die Korrelation beschreibt nicht unbedingt eine Ursache-Wirkungs-Beziehung in die eine oder andere Richtung.

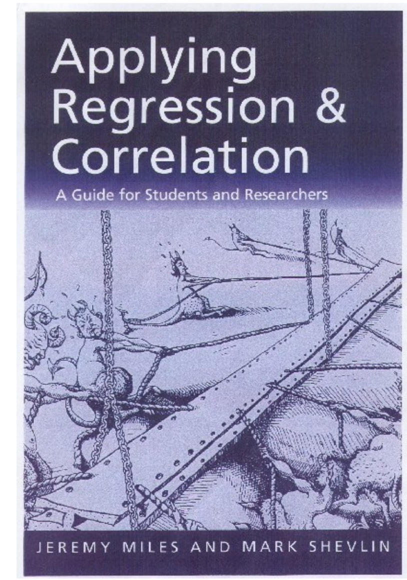


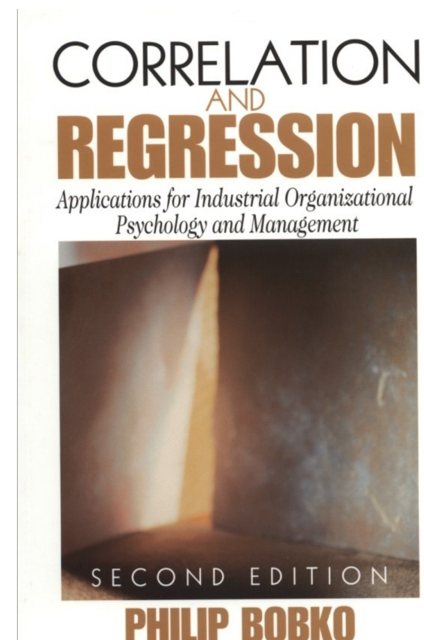
Korreliert heisst nicht notwendigerweise kausal verknüpft(!)



Beispiele:

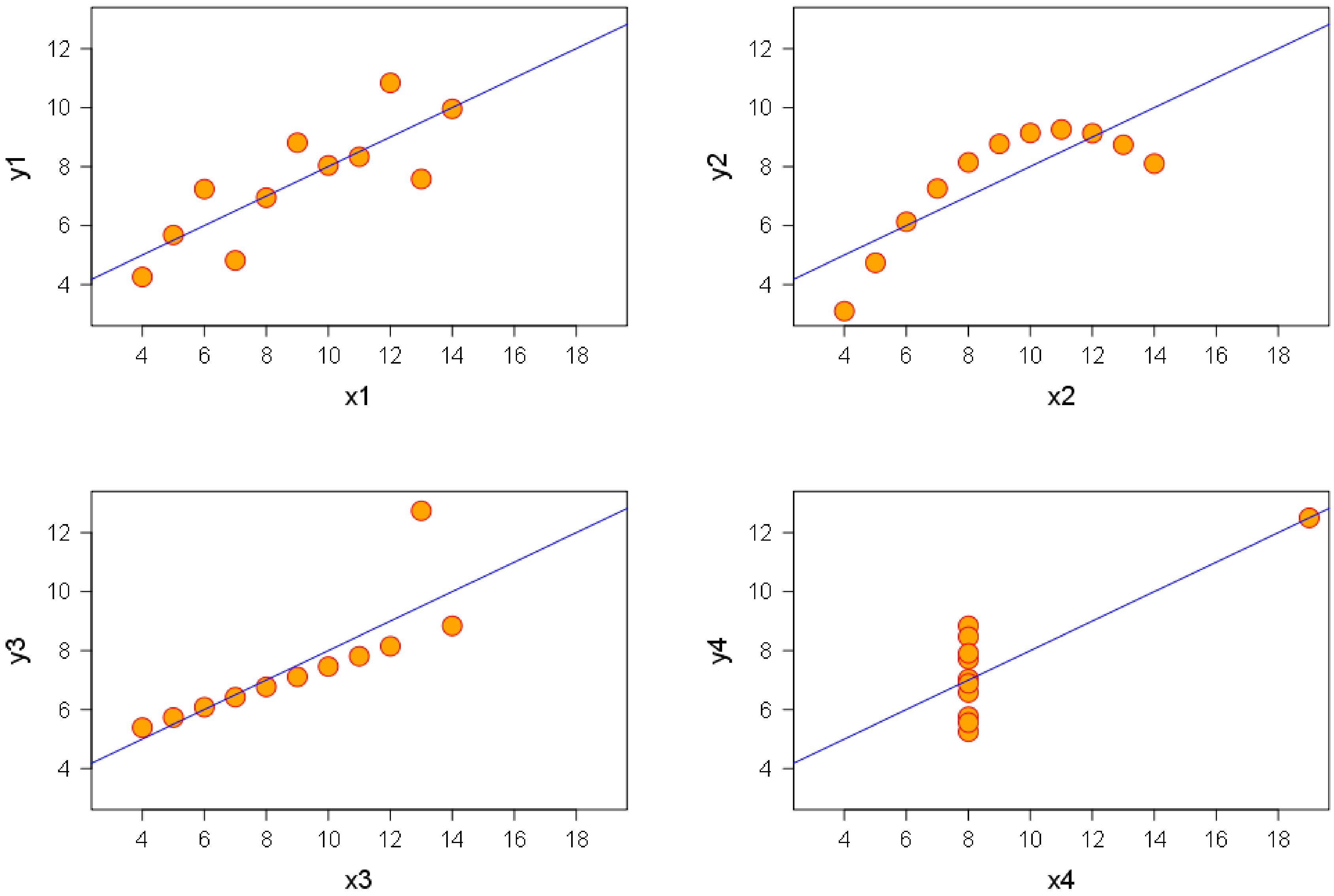






Pr.Buch Abb. 15

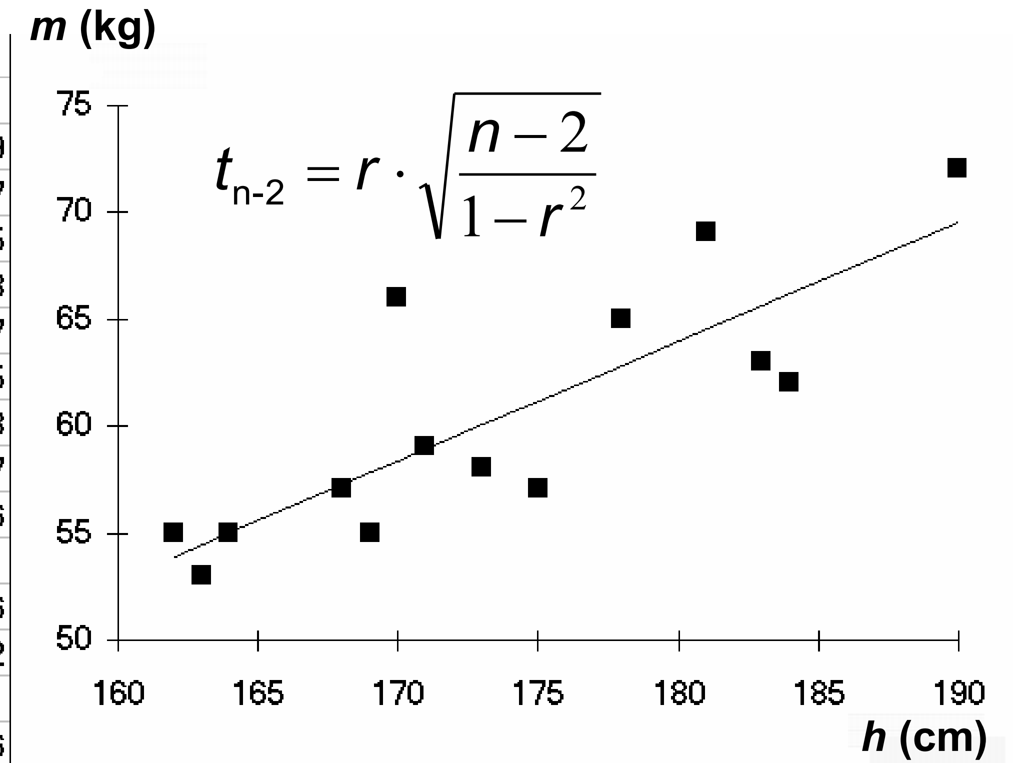
Extrembeispiel: r=0.816, y = 3 + 0.5x (Anscombe's quartet)



t-Test zur Korrelationsanalyse

Gibt es eine Beziehung zw. der Körpergrösse und Gewicht?

Körperhöhe (cm)	Gewicht (kg)			
162	55	53.929		
163	53	54.487		
164	55	55.045		
168	57	57.278		
169	55	57.837		
170	66	58.395		
171	59	58.953		
173	58	60.07		
175	57	61.186		
178	65	62.861		
181	69	64.536		
183	63	65.652		
184	62	66.211		
190	72	69.56		
	m=	0.5583	-36.50955	=b
		0.1131	19.66358	
r=	0.818505	0.6699	3.492297	
n=	14	24.358	12	
t=	6.030	297.07	146.3537	



$$t_{n-2} = r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

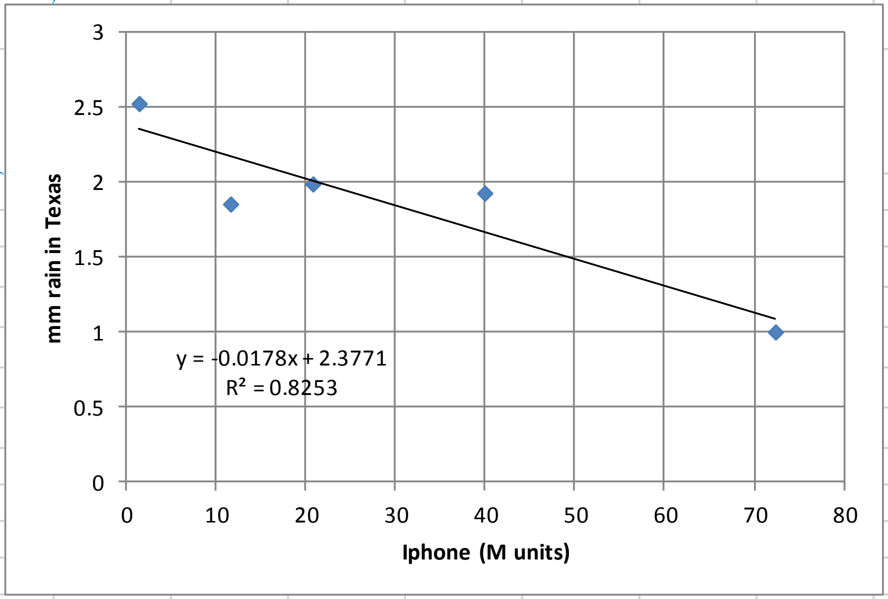
$$|t| = 6.030 > t_{12,\,\mathrm{krit}(0,05)} = 2.179 \Rightarrow H_0 \text{ ist falsch } (p<0.05)$$

$$|t| = 6.030 > t_{12,\,\mathrm{krit}(0,01)} = 3.055 \Rightarrow H_0 \text{ ist falsch } (p<0.01)$$

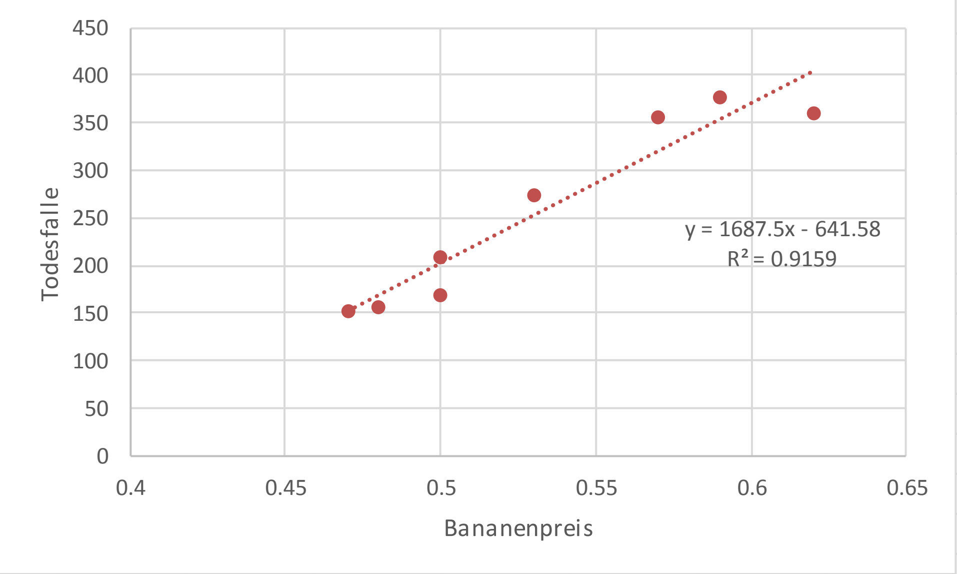
Korrelation heisst noch lange nicht Uhrsache!!!

	2007	2008	2009	2010	2011
Apple iPhone sales Millions of units ()	1.39	11.63	20.73	39.99	72.29
***Precipitation in Texas** Avg Daily Precipitation (mm) (CDC)*	2.52	1.85	1.99	1.93	1

1.39	2.52
11.63	1.85
20.73	1.99
39.99	1.93
72.29	1
R	-0.90846
n	5
t	-3.76471
P	0.032784
	p<0.05



	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Cost of bananas (unadjusted) *Dollars per pound (Bureau of Labor)*	0.5	0.47	0.48	0.5	0.53	0.62	0.57	0.59
People who died by falling out of their wheelchair *Deaths (US) (CDC)*	169	154	157	209	274	360	356	377



http://tylervigen.com/discover

Kontingenztabellen.
Chi-Quadrat-Test

Beispiel 1

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	28	75	103
Mann	48	49	97
	76	124	200

?

Korrelationsanalyse zwischen kategorischen Merkmalen

Häufigkeitstabelle (Kontingenztabelle):
eine tabellarische Darstellung der gemeinsamen Häufigkeitsverteilung zweier Variablen
X (z.B. Geschlecht) und *Y* (Brillenträgerschaft)

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	a=28	b=75	103
Mann	c=48	d=49	97
	76	124	200

Frage: unterscheidet sich die Häufigkeit eines feststellbaren Merkmals (Symptoms) in zwei Populationen?

Aufstellung der Nullhypothese

H_0: Geschlecht und Brillenträgerschaft sind voneinander **unabhängig** (es gibt keinen Unterschied)

$$\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'} \quad \text{oder} \quad \frac{a'}{c'} = \frac{b'}{d'}$$

Wie gross wäre die **erwartete Häufigkeit** (expected frequency) in der Zelle *a'*, wenn die Nullhypothese gültig ist?

Anzahl der Frauen:

$a + b = 103$

Anzahl der Personen mit Brille:

$a + c = 76$

Proportion der Frauen in der Stichprobe:

P(Frau) = $(a + b)/n = 103/200$

Proportion der Personen mit Brille:

P(mit Brille) = $(a + c)/n = 76/200$

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	a'=?	b'=?	103
Mann	c'=?	d'=?	97
	76	124	200

erwartete (expected) Kreuztabelle

Erwartete Häufigkeiten. Annahme: H_0 ist gültig ⇨ Geschlecht und Brillenträgerschaft sind unabhängige Ereignisse

$$\text{erwartete Häufigkeit in der Zelle links oben: } a' = \frac{a+b}{n} \cdot \frac{a+c}{n} \cdot n = \frac{(a+b)\cdot(a+c)}{n}$$

$$\text{erwartete Häufigkeit in der Zelle rechts oben: } b' = \frac{a+b}{n} \cdot \frac{b+d}{n} \cdot n = \frac{(a+b)\cdot(b+d)}{n}$$

$$\text{erwartete Häufigkeit in der Zelle links unten: } c' = \frac{c+d}{n} \cdot \frac{a+c}{n} \cdot n = \frac{(c+d)\cdot(a+c)}{n}$$

$$\text{erwartete Häufigkeit in der Zelle rechts unten: } d' = \frac{c+d}{n} \cdot \frac{b+d}{n} \cdot n = \frac{(c+d)\cdot(b+d)}{n}$$

	mit	ohne	Total
F	a=28	b=75	103
M	c=48	d=49	97
	76	124	200

empirische (observierte, observed) Kreuztabelle

	mit	ohne	Total
F	103*76/200	103*124/200	103
M	97*76/200	97*124/200	97
	76	124	200

erwartete (expected) Kreuztabelle

Die erwartete Häufigkeiten aus der empirischen Häufigkeiten

	mit	ohne	Total
F	a=28	b=75	103
M	c=48	d=49	97
	76	124	200

empirische (observed) Kreuztabelle

	mit	ohne	Total
F	a'=39.14	b'=63.86	103
M	c'=36.86	d'=60.14	97
	76	124	200

erwartete (expected) Kreuztabelle

$$(\text{erwartete Häufigkeit}) = \frac{(\text{Spaltensumme}) \cdot (\text{Zeilensumme})}{(\text{Anzahl der Daten in der Stichprobe})}$$

Wenn die Nullhypothese ist gültig:
Die Werte in der entsprechenden Zellen der Kontingenztabellen mit empirischen und erwarteten Häufigkeiten sind ungefähr gleich.
Die folgende Prüfgrösse (gewichtete quadratische Summe) zeigt **Chi-quadrat Verteilung**:

Prüfgrösse

$$\boxed{\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},}$$

wobei
O_i die empirische (observed)
E_i die erwartete (expected) Häufigkeit
in der i-ten Zelle sind.
Freiheitsgrad: (Anzahl der Zeilen –1)*(Anzahl der Spalten –1)
für eindimensionalen Tabellen: *n*-1

z.B. 2*2 (vierfelder-) Tabelle: 1

Bedingungen der Durchführung

n (Stichprobenumfang) soll genügend gross sein

In der Kontingenztabelle der *erwarteten* Häufigkeiten sollen alle Zellenwerte grösser als 1 sein.

In der Kontingenztabelle der erwarteten Häufigkeiten soll die Anzahl der Zellen, in den der Wert zwischen 1 und 5 ist, weniger als 20 % der Stichprobenumpfang sein.

(z.B. Vierfeldertabelle: alle Elemente sollen grösser als 5 sein)

Spezielfall für Vierfeldertabelle (Praktikumsbuch 2.b.30) Vierveldertest

	das untersuchte Merkmal		insgesamt
	ist vorhanden	ist nicht vorhanden	
Kollektiv A	a	b	$a+b$
Kollektiv B	c	d	$c+d$
insgesamt	$a+c$	$b+d$	n

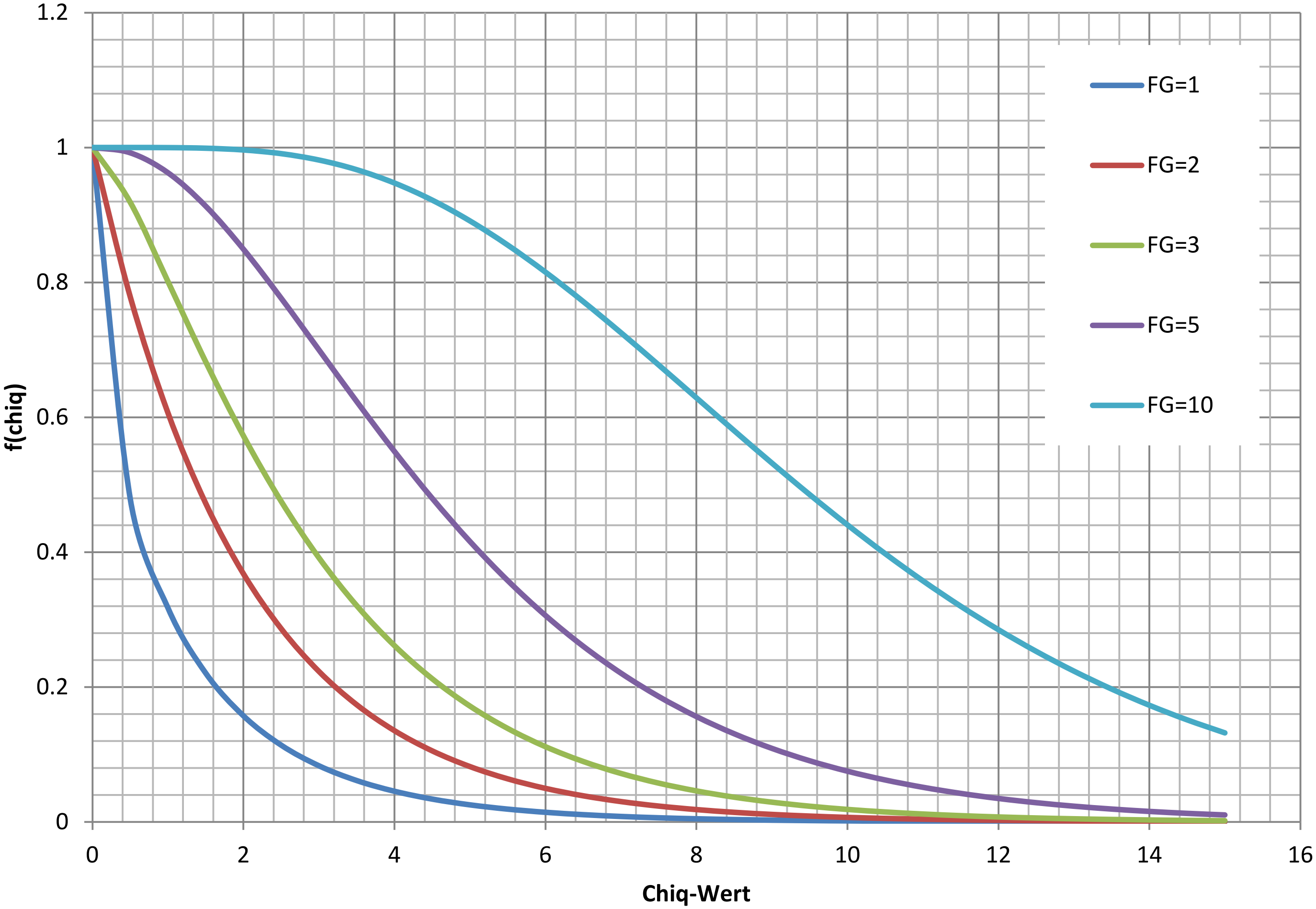
$$\chi^2_{\mathrm{M}} = \frac{n \cdot (ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

Die Bedingung der Durchführung:

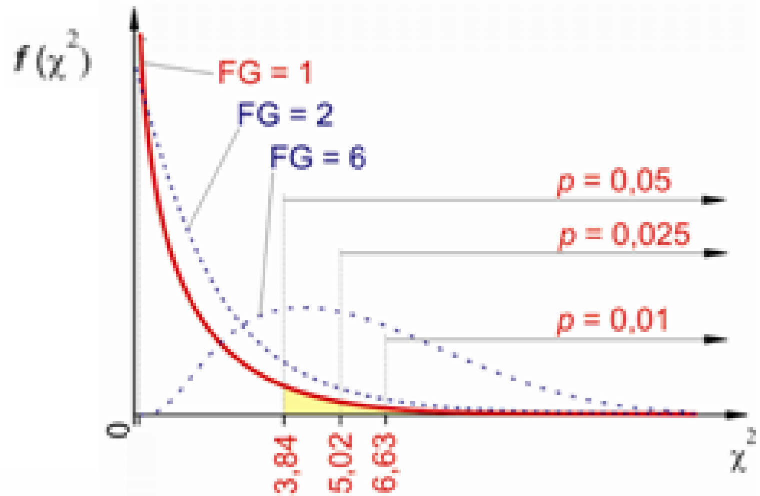
das Produkt der zwei kleinsten Teilsummen soll grösser sein als $5n$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$$

Die Chiq. Verteilung ist auch eine Familie…



χ^2 (CHI-QUADRAT)-VERTEILUNG



	p (Irrtumswahrscheinlichkeit)						
Freiheitsgrad (FG)	**0,99**	**0,975**	**0,95**		**0,025**	**0,01**	**0,001**
1	0,0000157	0,0000982	0,000393		5,02	6,63	10,83
2	0,0201	0,0506	0,103		7,88	9,21	13,82
3	0,115	0,216	0,352		9,35	11,34	16,27
4	0,297	0,484	0,711		11,14	13,28	18,47
5	0,554	0,831	1,15		12,83	15,09	20,51
6	0,872	1,24	1,64		14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17		16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73		17,53	20,09	26,13

Beispiel 1

Die Bedingung des Tests:
das Produkt der zwei kleinsten Teilsummen soll grösser sein als 5*n*

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	a=28	b=75	103
Mann	c=48	d=49	97
	76	124	200

76*97 = 7372 > 5*200 =1000

Man darf den Chi-Quadrat-Test anwenden

$$\chi^2_M = \frac{200 \cdot (28 \cdot 49 - 48 \cdot 75)^2}{76 \cdot 124 \cdot 103 \cdot 97} = 10.54$$

$10.54 > \chi^2_{krit} = 3{,}84$ $\quad H_0$ ist falsch $\Rightarrow$

Es gibt einen Zusammenhang zw. dem Geschlecht und der Brillenträgerschaft (Männer tragen Brille öfter)

	p (Irrtumswahrscheinlichkeit)						
Freiheitsgrad (FG)	**0,99**	**0,975**	**0,95**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,001**
1	0,0000157	0,0000982	0,000393	3,84	5,02	6,63	10,83

$$\chi^2_M = \frac{200 \cdot (28 \cdot 49 - 48 \cdot 75)^2}{76 \cdot 124 \cdot 103 \cdot 97} = 10.54$$

$10.54 > \chi^2_{krit} = 3.84$ $\quad H_0$ ist falsch

$10.54 > \chi^2_{krit} = 6.63$ $\quad H_0$ ist falsch

mit einem Signifikanzniveu: <0.01

	A	B	C	D
1	**Empirische Werte**			
2		mit Brille	ohne Brille	
3	Frau	28	75	=SUMME(B3:C3)
4	Mann	48	49	=SUMME(B4:C4)
5		=SUMME(B3:B4)	=SUMME(C3:C4)	=SUMME(B5:C5)
6				
7	**Ewartete Werte**			
8		mit Brille	ohne Brille	
9	Frau	=$D3*B$5/$D$5	=$D3*C$5/$D$5	=SUMME(B9:C9)
10	Mann	=$D4*B$5/$D$5	=$D4*C$5/$D$5	=SUMME(B10:C10)
11		=SUMME(B9:B10)	=SUMME(C9:C10)	=SUMME(B11:C11)
12				
13			Signifikanzniveau:	=CHITEST(B3:C4,B9:C10)
14			Chi^2-Wert:	=CHIINV(D13,1)

	A	B	C	D
1	**Empirische Werte**			
2		mit Brille	ohne Brille	
3	Frau	28	75	103
4	Mann	48	49	97
5		76	124	200
6				
7	**Ewartete Werte**			
8		mit Brille	ohne Brille	
9	Frau	39.140	63.860	103
10	Mann	36.860	60.140	97
11		76	124	200
12				
13			Signifikanzniveau:	0.0012
14			Chi^2-Wert:	10.5442606

Kalkulation mit Excel

Beispiel 2

	mit Brille	ohne Brille	Total
Frau	1	3	4
Mann	5	3	8
	6	6	12

?

$4*6 = 24 < 5*12 = 60$

Dürfen wir in diesem Fall den Chi-Quadrat-Test nicht anwenden.

Erhöhung des Umfanges der Stichprobe

	mit	ohne	Total
F	1	3	4
M	5	3	8
	6	6	12

12 → 200

	mit	ohne	Total
F	28	75	103
M	48	49	97
	76	124	200

Frauen

$$\frac{n_{mit}}{n_{ohne}} = \frac{1}{3} = 0.33 \qquad \frac{n_{mit}}{n_{ohne}} = \frac{28}{75} = 0.37$$

Männer

$$\frac{n_{mit}}{n_{ohne}} = \frac{5}{3} = 1.67 \qquad \frac{n_{mit}}{n_{ohne}} = \frac{48}{49} = 0.98$$

es gibt eine Vermutung, aber der Nachweis geht nicht

n vergrössert sich (12 → 200): der Nachweis geht

Beispiel 3 H_0: die Häufigkeit von Lungenkrebs bei Rauchern und Nichtrauchern ist identisch, d.h. $\chi^2 = 0$.

H_1: die beiden Häufigkeiten unterscheiden sich, also ist $\chi^2 \neq 0$.

In der Tabelle sind die Häufigkeiten der zwei Kollektive aus der Stichprobe einer Lungenfürsorge dargestellt.

	Lungen krebs	kein Lungen krebs	
Raucher	14	13	27
Nichtraucher	9	25	34
	23	38	61

Da 23·27 = 621 > 5·61 = 305, kann der Test durchgeführt werden.

$$\chi_M^2 = \frac{61\cdot(14\cdot 25 - 9\cdot 13)^2}{23\cdot 38\cdot 34\cdot 27} = 4.13$$

Es ist zu sehen, dass $\chi_M^2 \neq 0$ ist, aber ist der Unterschied auch signifikant (oder nur zufällig)?

Sei das Signifikanzniveau: 5%.

Der Freiheitsgrad (2x2 Tabelle) ist: 1.

$4.13 > \chi^2_{krit} = 3{,}84$ $\Rightarrow$ H_0 ist falsch

Danach ist der Unterschied in der Häufigkeit von Lungenkrebs bei Rauchern und Nicht-rauchern signifikant (bei einem Signifikanzniveau von 5%).

Pr.Buch 2.b.29 (Bemerkung 15)

Beispiel 4 (Pr. Buch, R.103.) Über eine erfolgreiche operative Korrektion einer bestimmten Augenkrankheit (ischaemische optische Neuropathie vom nicht-arterialen Typ) wurde im Jahre 1989 eine Veröffentlichung ausgegeben. Da in dieser Krankheit früher keinerlei wirksame Behandlungsmethode bekannt war, wurde dieser Eingriff verbreitet angewendet. Kürzlich erschienen jedoch Berichte auch von erfolglosen Eingriffen, daher hat man 244 solche Kranken in 25 klinischen Zentren statistisch erfasst, von denen bei 119 Personen die Operation durchgeführt wurde, bei 125 Kranken jedoch nicht. Die Beobachtungen in tabellarischer Form:

empirische Häufigkeiten

	operiert	nicht op.	insg.
verbessert	39	53	92
nicht verbessert	52	56	108
verschlechtert	28	16	44
insgesamt	119	125	244

erwartete Häufigkeiten

	operiert	nicht op.	insg.
verbessert	45	47	92
nicht verbessert	53	55	108
verschlechtert	21	23	44
insgesamt	119	125	244

Es ist mit statistischen Methoden zu prüfen, ob die Anzahl der Besserungen ohne Operation tatsächlich höher war? H_0: keine Differenz

khi^2 = $(39–44.87)^2/44.87+(53–47.13)^2/47.13+(52–52.67)^2/52.67+(56–55.33)^2/55.33+(28–21.46)^2/21.46+(16–22.54)^2/22.54 = 5.407$

Weil $5.407 < 5.991 = \chi^2_{\text{krit, FG=2}}$, ablehnen wir die H_0 nicht.

Wieder ist alles im Excel einfacher:

empirische Häufigkeiten

	operiert	nicht op.	insg.
verbessert	39	53	92
nicht verbessert	52	56	108
verschlechtert	28	16	44
insgesamt	119	125	244

erwartete Häufigkeiten

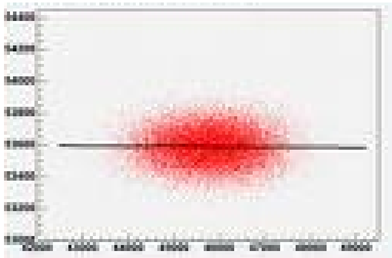
	operiert	nicht op.	insg.
verbessert	45	47	92
nicht verbessert	53	55	108
verschlechtert	21	23	44
insgesamt	119	125	244

P=chiq.test(beobachtet;erwartet)

Arten von Abhängigkeitsbeziehungen

Unabhängigkeit

IQ



Körpergrösse

Abhängigkeit

stochastische Beziehung

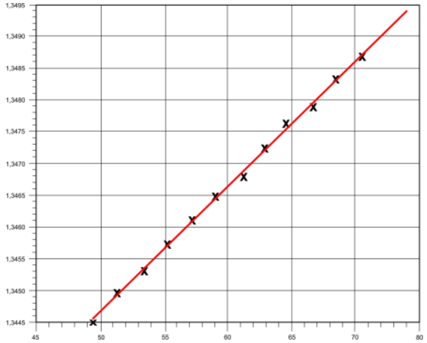
deterministische Beziehung

Korrelations-analyse

vermischt

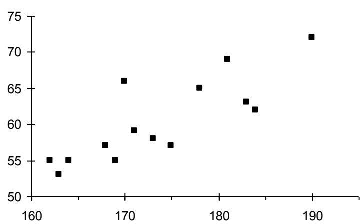
Assoziations-analyse

n



Konzentration

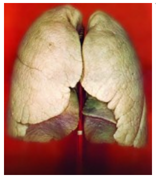
m



Körpergrösse

Geschmack

Färbung



numerisch

ordinal

nominal

numerisch