



## Kleine medizinische Signalverarbeitung



KAD 2021.02.17

**Signal:** eine Grösse, die Information trägt, weiterleitet oder speichert

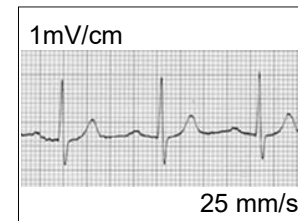
Beispiel1:

elektrische Spannung, die infolge der Herz-/Gehirn-tätigkeit auf der Körper-/Schädeloberfläche erscheint (EKG/EEG)

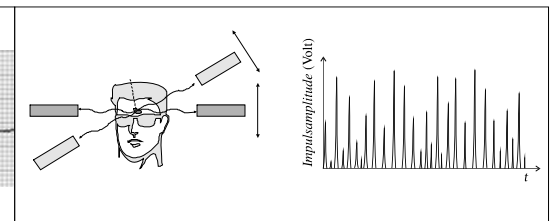
Beispiel2:

die detektierte Gamma-Quanten bei der Isotopendiagnostik

(1)



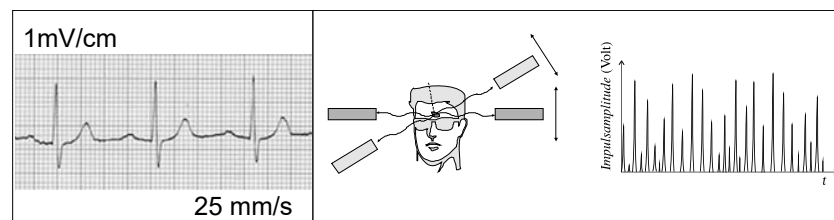
(2)



2

## Klassifizierung der Signale

- |                        |   |                        |
|------------------------|---|------------------------|
| statisches S.          | – | zeitabhängiges S.      |
| (quasi)periodisches S. | – | nichtperiodisches S.   |
| stochastisches S.      | – | nichtstochastisches S. |
|                        |   | (deterministisches S.) |
| nichtelektrisches S.   | – | elektrisches S.        |
| analoges S.            | – | digitales S.           |



3

in ausgezeichnete Rolle

## elektrische Signale

die nichtelektrische Signale werden in elektrische Signale umgewandelt

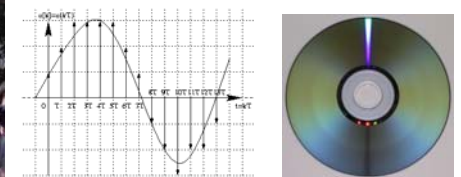
Vorteil der elektrischen Signale:  
Umwandlung, Verstärkung,  
Weiterleitung ist einfach



## digitale Signale

die analoge Signale werden digitalisiert

Vorteil der digitalen Signale:  
Speicherung ist einfach,  
Rausch kann  
minimalisiert werden



4

Grösse (und Einheit), die für die Vergleichung der Masse der Signale verwendet wird:

**Bel-Zahl:  $n$**

(nach A. Bell)

Einheit von  $n$ : Bel (B)

$$n = \lg \frac{P_2}{P_1} \text{ B} = \lg \frac{J_2}{J_1} \text{ B} = \lg \frac{E_2}{E_1} \text{ B}$$

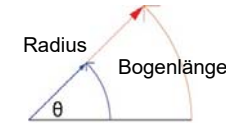
Zehnerlogarithmus des Quotienten von zwei Leistungen (oder Intensitäten, oder Energien)

5

Vgl. **Bogenmass**

$$\Theta = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$$

$$[\Theta] = \frac{\text{m}}{\text{m}} = \text{rad} = 1$$



Vgl. **pH** (power of Hydrogen)

$$\text{pH} = -\lg \frac{[\text{H}^+]}{1\text{M}}$$

$$\text{z.B.: } [\text{H}^+] = 10^{-7} \text{ M}$$

$$\Rightarrow \text{pH} = -\lg 10^{-7} = -1 \cdot (-7) = 7$$

Anstatt der Bel-Zahl die angewandte Grösse:

**Dezibel-Zahl oder Pegel**

$$n = 10 \cdot \lg \frac{P_2}{P_1} \text{ dB} \quad (10\text{d} = 1)$$

6

**charakteristische** Grösse: **Leistung** (o. Intensität/ Energie),  
**technische** Grösse: (elektrische) **Spannung**

Zusammenhang zwischen der Leistung und der Spannung:

$$P = U \cdot I = U^2 / R \quad (\text{Ohm: } U = R \cdot I)$$

Dezibel Zahl mit Spannungsverhältnis:

$$n = 10 \cdot \lg \frac{P_2}{P_1} \text{ dB} = 10 \cdot \lg \frac{U_2^2 / R_2}{U_1^2 / R_1} \text{ dB} \stackrel{R_2 \approx R_1}{=} 10 \cdot \lg \frac{U_2^2}{U_1^2} \text{ dB} = 20 \cdot \lg \frac{U_2}{U_1} \text{ dB}$$

7

$$\frac{P_2}{P_1} = 2 \Leftrightarrow 10 \lg 2 \text{ dB} = 10 \cdot 0,3 \text{ dB} = 3 \text{ dB}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -3 \text{ dB}$$

vgl. Halbwerts-Zeit/Dicke

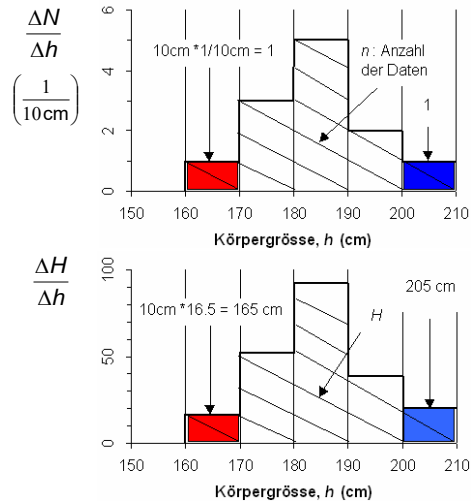
$$\frac{P_2}{P_1} = 10 \Leftrightarrow 10 \lg 10 \text{ dB} = 10 \cdot 1 \text{ dB} = 10 \text{ dB}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 100 \Leftrightarrow 10 \lg 100 \text{ dB} = 10 \cdot 2 \text{ dB} = 20 \text{ dB}$$

$U_2/U_1$	$P_2/P_1$	dB
1,414	2	3
2	4	6
	8	9
3,16	10	10
	20	13
10	100	20
	$1000=10^3$	30
$100=10^2$	$10000=10^4$	40
$1000=10^3$	$10^6$	60

8

## Häufigkeitsverteilung



$h$ : Körperhöhe

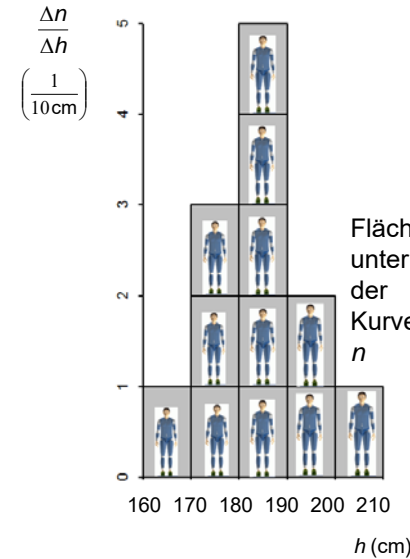
$H$ : kollektive Höhe, Gesamthöhe



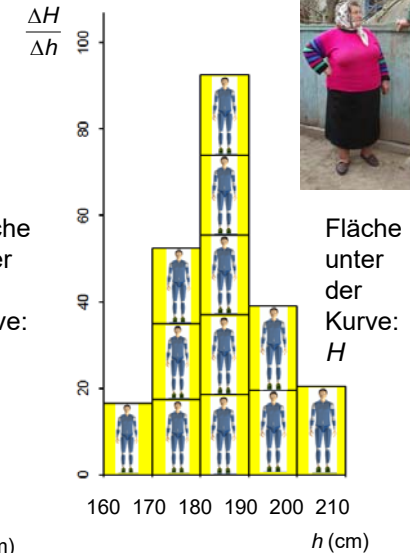
## Spektrum als eine spezielle Häufigkeitsverteilung

9

## Häufigkeitsdichte



## Spektrum

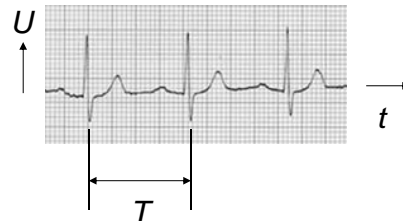


10

## Fourier-Theorem für periodische Funktionen (Signale)

Jede periodische Funktion kann durch die Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen (Grundfrequenz + Obertöne) hergestellt werden.

periodische Funktion: es gibt eine Periode(nzeit),  $T$



$1/T=f$ , wo  $f$  ist die Frequenz

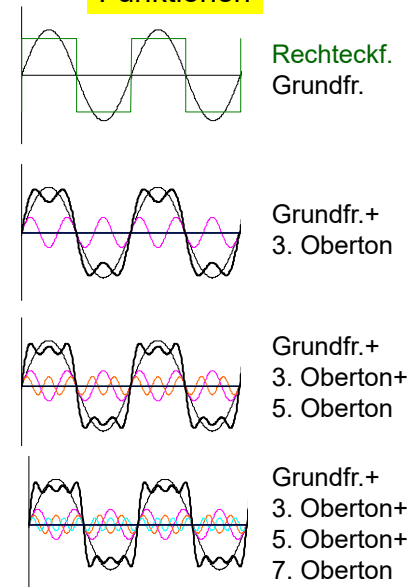
$f$  ist die Frequenz der Sinusfunktion: **Grundfrequenz** (Grundschiwingung)

$2f, 3f, 4f, \dots$  : **Obertöne** (Oberschwingungen)

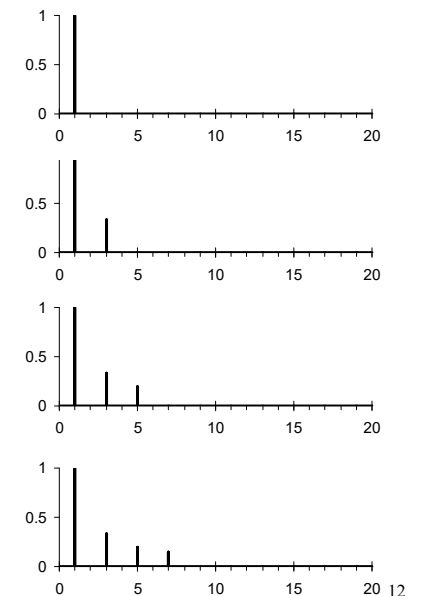
(Linienpektrum)

11

## Funktionen

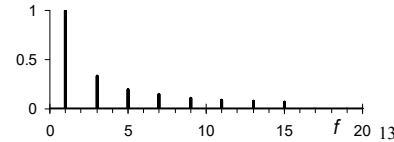
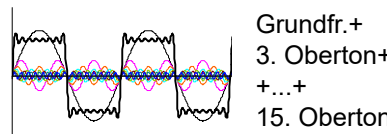
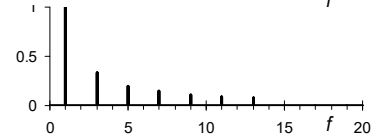
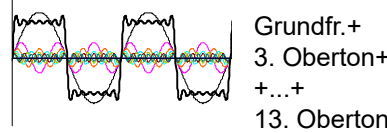
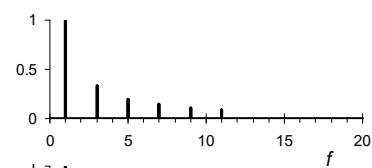
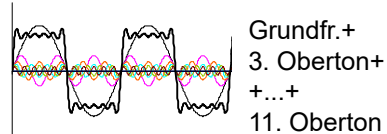
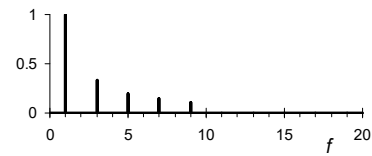
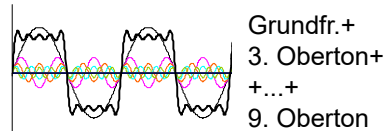


## Spektrum



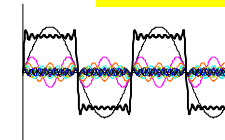
12

## Funktionen

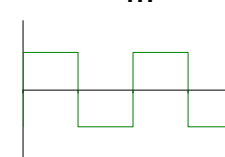
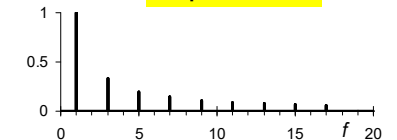


## Spektrum

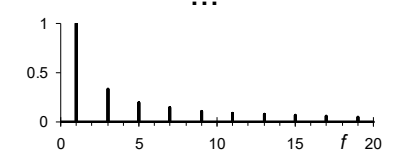
## Funktionen



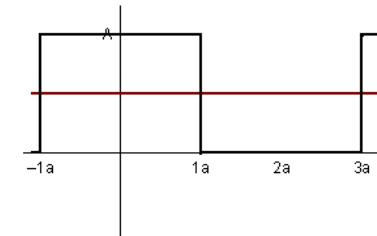
Grundfr.+  
3. Oberton+  
+...+  
17. Oberton



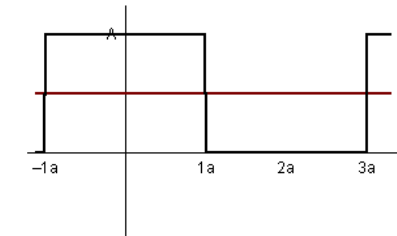
Grundfr.+  
3. Oberton+  
+...+  
17. Oberton+  
+...



Einzelne Summanden bis zur Ordnung 0

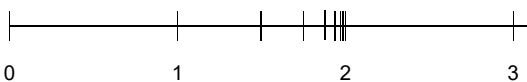


Überlagerung



## Vgl. Funktionsreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$



$$\sum_{k=0}^{31} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{31}} = 2, \text{ Fehler: } 4,6 \cdot 10^{-10}$$

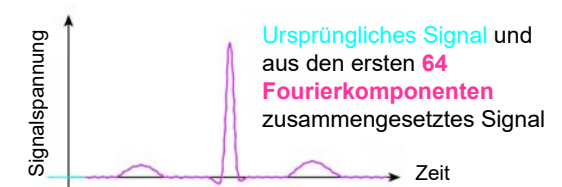
genau genug(?)

$$\sum_{k=0}^{49} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{49}} = 2, \text{ Fehler: } 3,55 \cdot 10^{-15}$$

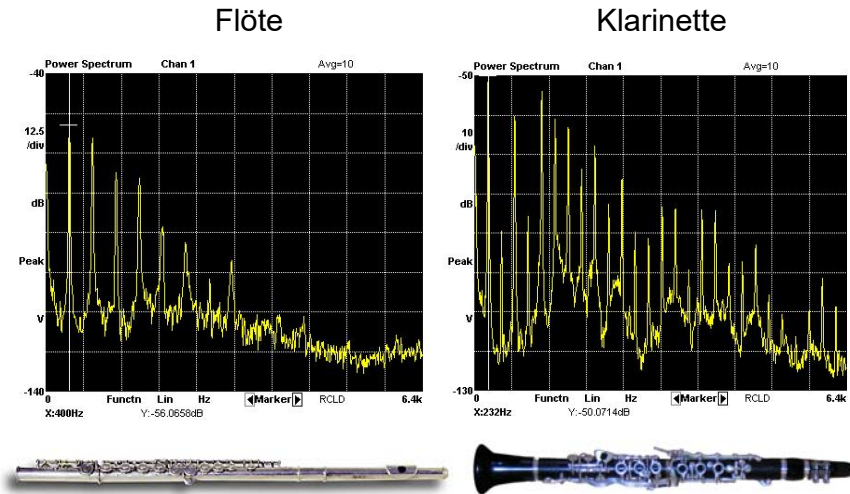
genau genug

i	1/2 <sup>k</sup>	Σ(1/2 <sup>k</sup> )	ε=2-Σ(1/2 <sup>k</sup> )
0	1	1	1
1	0,5	1,5	0,5
2	0,25	1,75	0,25
3	0,125	1,875	0,125
4	0,0625	1,9375	0,0625
5	0,03125	1,96875	0,03125
6	0,015625	1,984375	0,015625
7	0,007813	1,9921875	0,0078125
8	0,003906	1,99609375	0,00390625
9	0,001953	1,998046875	0,001953125
10	0,000977	1,9990234375	0,0009765625
11	0,000488	1,99951171875	0,00048828125
12	0,000244	1,9997578125	0,000244140625
13	0,000122	1,99987890625	0,0001220703125
14	6,1E-05	1,999939453125	6,1E-05
15	3,05E-05	1,9999697265625	3,05E-05
16	1,52E-05	1,99998486328125	1,52E-05
17	7,6E-06	1,999992431640625	7,6E-06
18	3,8E-06	1,9999962158203125	3,8E-06
19	1,9E-06	1,99999810791015625	1,9E-06
20	9,5E-07	1,999999053955078125	9,5E-07
21	4,75E-07	1,9999995269775390625	4,75E-07
22	2,37E-07	1,99999976348876953125	2,37E-07
23	1,19E-07	1,999999881744384765625	1,19E-07
24	5,95E-08	1,99999994087218953125	5,95E-08
25	2,97E-08	1,99999997043609375	2,97E-08
26	1,49E-08	1,999999985218046875	1,49012E-08
27	7,45E-09	1,9999999926090234375	7,45058E-09
28	3,73E-09	1,99999999630451171875	3,72529E-09
29	1,86E-09	1,999999998152255859375	1,86265E-09
30	9,31E-10	1,9999999990761279296875	9,31323E-10
31	4,66E-10	1,99999999953806396484375	4,65661E-10
32	2,33E-10	1,999999999769031982421875	2,32831E-10
33	1,16E-10	1,9999999998845159912109375	1,16416E-10
34	5,8E-11	1,99999999994225799560546875	5,82084E-11
35	2,9E-11	1,999999999971128997802734375	2,91042E-11
36	1,45E-11	1,9999999999855644989013671875	1,45536E-11
37	7,25E-12	1,99999999999278224945068359375	7,25275E-12
38	3,62E-12	1,999999999996391124725341796875	3,62638E-12
39	1,81E-12	1,9999999999981955623626708984375	1,81319E-12
40	9,05E-13	1,99999999999909778118133544921875	9,05903E-13
41	4,52E-13	1,999999999999548890590667724609375	4,52952E-13
42	2,26E-13	1,9999999999997744452953338623046875	2,26476E-13
43	1,13E-13	1,99999999999988722264766693115234375	1,13234E-13
44	5,65E-14	1,999999999999943611323833465576171875	5,65616E-14
45	2,82E-14	1,9999999999999718056616667327880859375	2,82808E-14
46	1,41E-14	1,99999999999998590283083336639404296875	1,41404E-14
47	7,11E-15	1,999999999999992951415416683197021484375	7,10543E-15
48	3,55E-15	1,9999999999999964757077083415985107421875	3,55271E-15
49	1,78E-15	1,99999999999999823785385417079925537109375	1,78266E-15
50	8,88E-16	1,99999999999999911892692708539962768546875	8,88266E-16

Erzeugung  
eines EKG-  
Signals aus der  
Summe von  
Sinussignalen



Warum nennen wir die Grund- und Oberfrequenzen als Grundton und Obertönen?

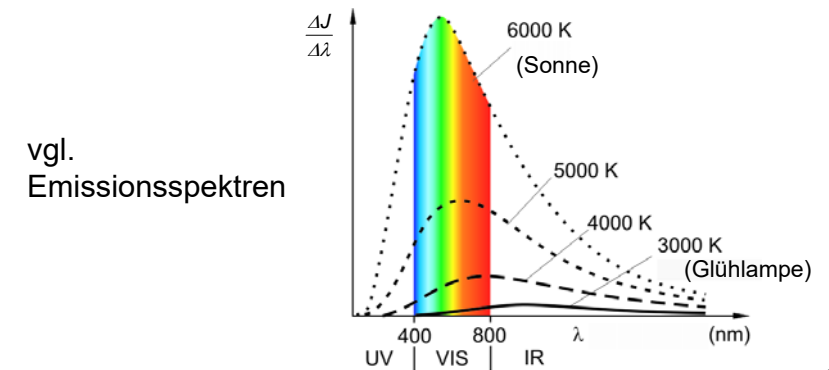


17

## Fourier-Theorem für aperiodische Funktionen (Signale)

Jede Funktion kann durch eine Summe von Sinus- (harmonischen) Funktionen hergestellt werden.

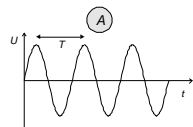
Das Spektrum: kontinuierliches Spektrum.



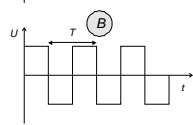
18

## Funktionen

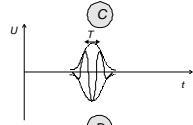
Sinus-Funktion



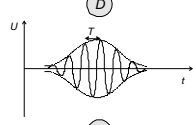
periodische Funktion



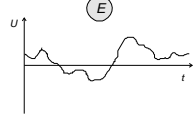
ein Paar Periode



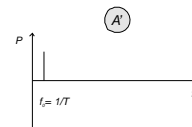
ein Paar Periode



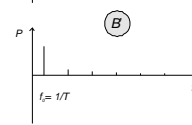
aperiodische Funktion



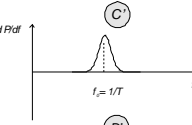
## Spektrum



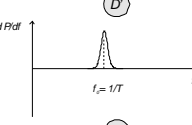
Linienspektrum (1 Linie)



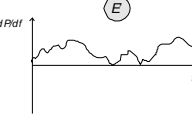
Linienspektrum



Bandenspektrum



Anwendung: Puls-Ultraschall



Bandenspektrum

kontinuier. Spektrum

19

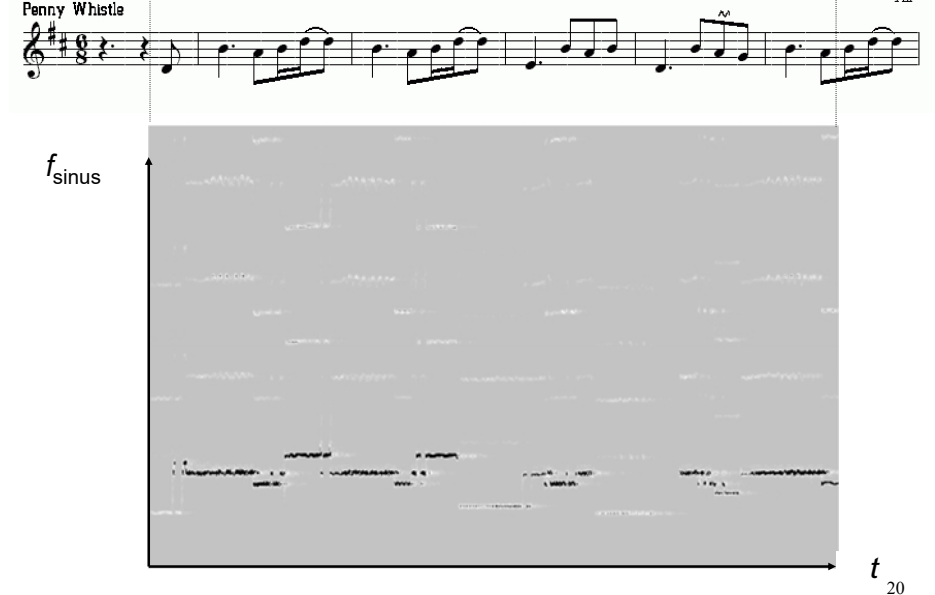
Inisheer

Penny Whistle

## Musik in Zeit-Frequenz Darstellung

Traditional

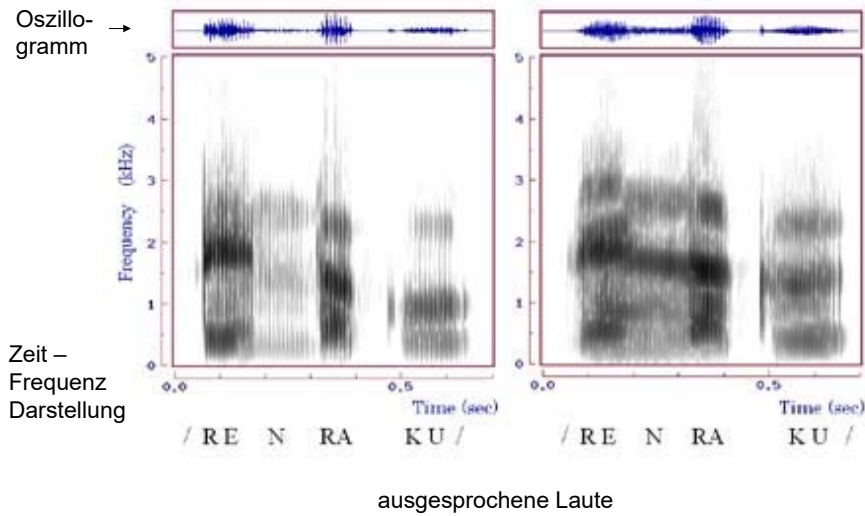
Air



20



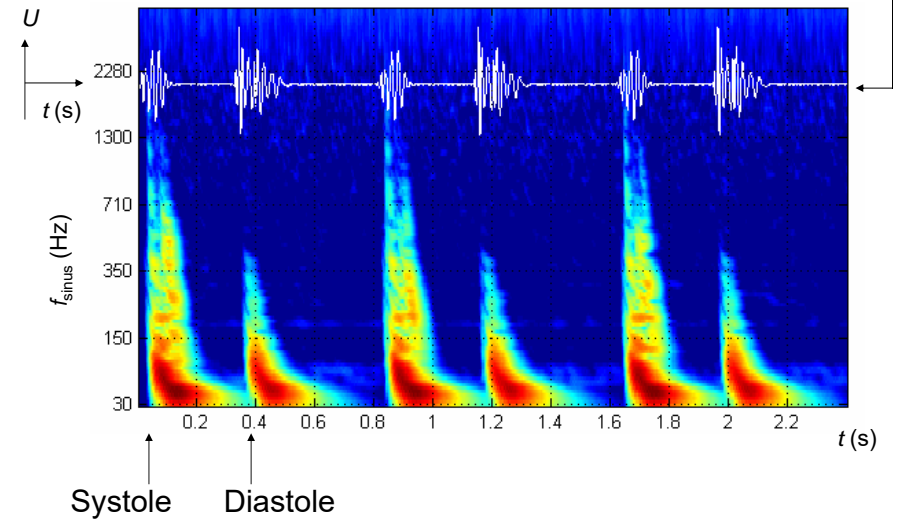
## Sonogramm = Schall-Spektrogramm (voiceprint)



<http://www.nrips.go.jp/org/fourth/info3/index-e.html>

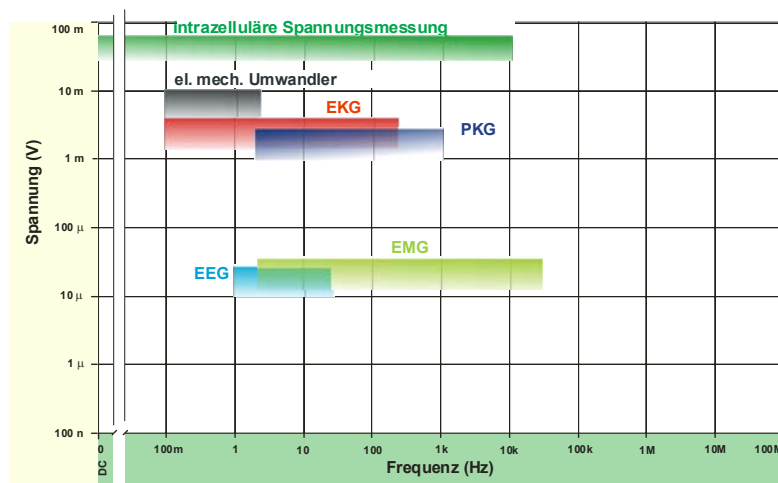
21

## Herztöne in Zeit-Frequenz Darstellung (+ Oszillogramm)



22

## Einige charakteristischen Daten bioelektrischer Potentiale



Biophysik für Mediziner, Abb. VII.4.

23

## Eine frequenzabhängige Einheit: (elektrischer) Verstärker

- (1)  $P_{\text{ein}} < P_{\text{aus}}$
- (2)  $P_{\text{ein}}$  und  $P_{\text{aus}}$  : gleiche Funktionen

gleich: „fundamentale“ Anforderung  
ähnlich: reelle Anforderung

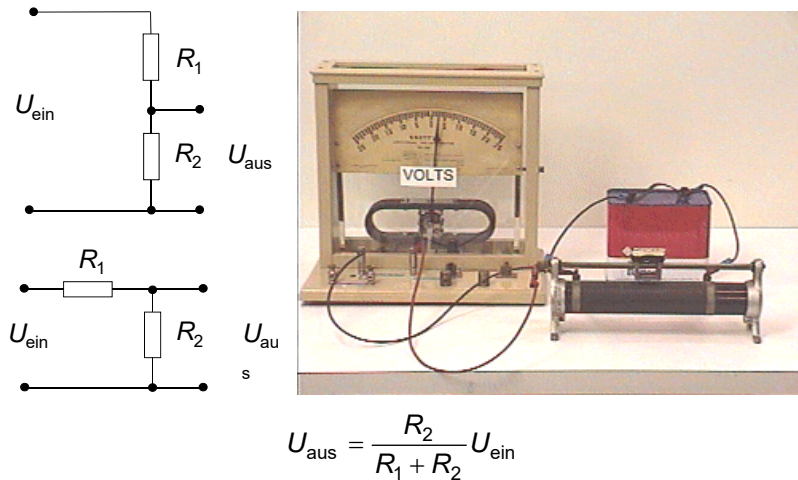
$$(1) + (2) \quad V_P \cdot P_{\text{ein}}(t) \equiv P_{\text{aus}}(t), \text{ wo } V_P > 1$$

$$V_P = \frac{P_{\text{aus}}}{P_{\text{ein}}}, \text{ Leistungsverstärkung (sfaktor)}$$

$$V_U = \frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{ein}}}, \text{ Spannungsverstärkung (sfaktor)}$$

24

## Frequenzunabhängiger Spannungsteiler

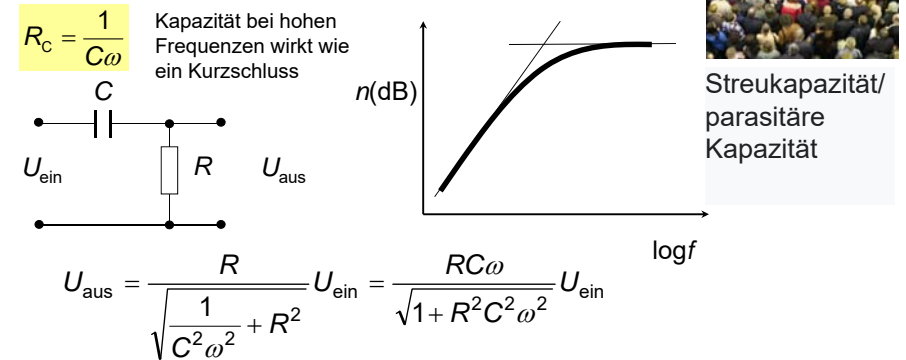


Frequenzabhängige Spannungsteilung mit Kondensator

25

Ergänzungsmaterial

## Hochpass Filter (high-pass filter)



bei sehr kleinen Frequenzen: wenn  $\omega \approx 0$ ,  $U_{\text{aus}} = 0$

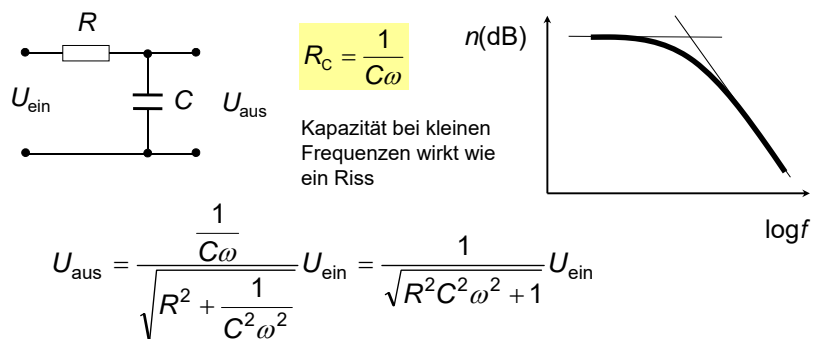
bei kleinen Frequenzen: wenn  $\omega \ll \omega_0$ ,  $U_{\text{aus}} = RC\omega U_{\text{ein}}$

bei hohen Frequenzen: wenn  $\omega \gg \omega_0$  ( $\omega \approx \infty$ ),  $U_{\text{aus}} = U_{\text{ein}}$

26

Ergänzungsmaterial

## Tiefpass Filter (low-pass filter)



bei kleinen Frequenzen: wenn  $\omega \ll \omega_0$  ( $\omega \approx 0$ ),  $U_{\text{aus}} = U_{\text{ein}}$

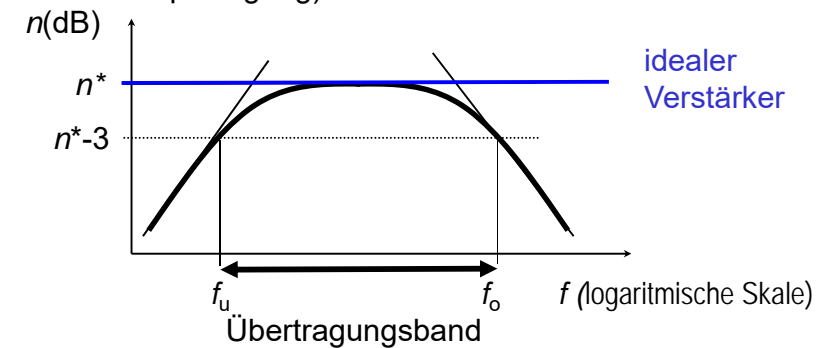
bei grossen Frequenzen: wenn  $\omega \gg \omega_0$ ,  $U_{\text{aus}} = \frac{1}{RC\omega} U_{\text{ein}}$

bei sehr grossen Frequenzen: wenn  $\omega \approx \infty$ ,  $U_{\text{aus}} = 0$

27

für (1):  $V_p > 1$ ,  $n = 10 \lg V_p = 20 \lg V_U(\text{dB}) > 0 \text{ dB}$

für (2): **Frequenzcharakteristik**  
(Frequenz-Antwort-Funktion, Übertragungskennlinie, Frequenzgang)

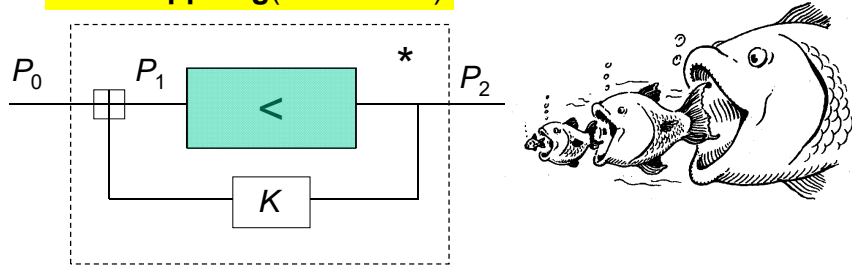


$f_u$  : untere Grenzfrequenz

$f_o$  : obere Grenzfrequenz

28

## Rückkopplung(sverstärker)



$$(a) P_1 = P_0 + KP_2 \quad (b) V_P = \frac{P_2}{P_1}$$

$$(c) V_P^* = \frac{P_2}{P_0} = \frac{P_1 V_P}{P_0} = \frac{(P_0 + KP_2) V_P}{P_0} = V_P + K \frac{P_2}{P_0} V_P = V_P + KV_P^* V_P$$

$$V_P^* - KV_P^* V_P = V_P \quad \boxed{V_P^* = \frac{V_P}{1 - KV_P}}$$

29

$$V_P^* = \frac{V_P}{1 - KV_P}, \quad V_P^* : \text{Verstärkungsfaktor des rückgekoppelten Verstärkers}$$

$V_P$  : Verstärkungsfaktor des Verstärkers (ohne R.k.)

$K > 0$ , Mitkopplung (positive R.k. - gleiche Phase),

$$V_P^* > V_P \quad (\text{Vorteil})$$

$K < 0$ , Gegenkopplung (negative R.k. - entgegengesetzte Phase),

$$V_P^* < V_P \quad (\text{Nachteil})$$

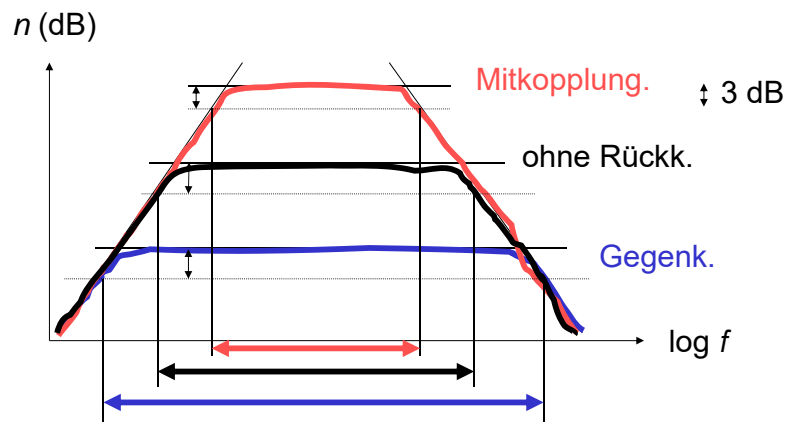
**Mitkopplung:** Sinusoszillator  
( $KV_P=1$ , Verstärkung: „unendlich“)

Anwendung: Ultraschall(generator)  
Wärmetherapie(gen.)

**Gegenkopplung:** alle Verstärker



30

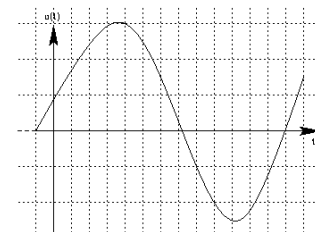


**Mitkopplung:** Übertragungsband – schmaler (Nachteil)

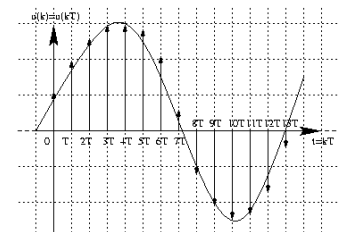
**Gegenkopplung:** Übertragungsband – breiter (Vorteil)

31

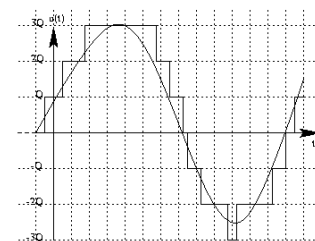
## Analoges Signal – digitales Signal



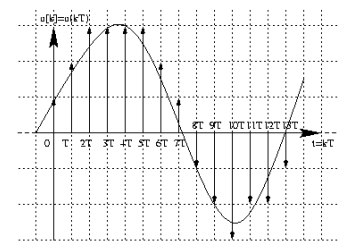
analoges Signal: zeit- und wertekontinuierliches S.



zeitdiskretes, wertekontinuierliches S.



wertdiskretes, zeitkontinuierliches S.

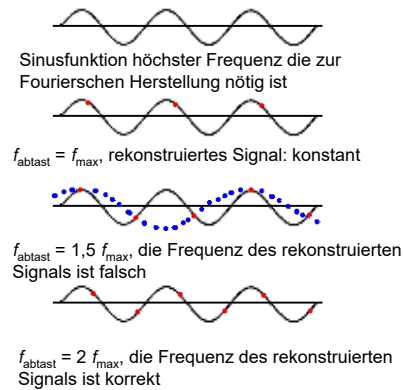


digitales Signal: zeit- und wertdiskretes S.

32



zeitdiskretes Signal: man kennt den Signalwert nicht in allen Zeitpunkten



### Nyquist-Shannon Abtasttheorem:

Ein Signal einer Maximalfrequenz  $f_{\text{max}}$  mit einer Frequenz grösser als  $2f_{\text{max}}$  abgetastet werden muss, damit man aus dem so erhaltenen zeitdiskreten Signal das Ursprungssignal ohne Informationsverlust rekonstruieren kann.

z.B.: hifi,  $f_{\text{max}} = 20 \text{ kHz}$

$f_{\text{ablast}} = 44.1 \text{ kHz} > 2 \cdot 20 \text{ kHz}$

wertediskretes Signal: der Wert des Signals kann nicht beliebig gross sein

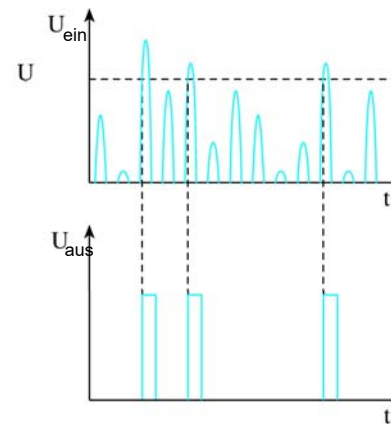
z.B.: hifi, 16 bit =  $2^{16} = 65\,536$  (CD Standard)

24 bit =  $2^{24} = 16\,777\,216$  ("beste" Tonkarte)

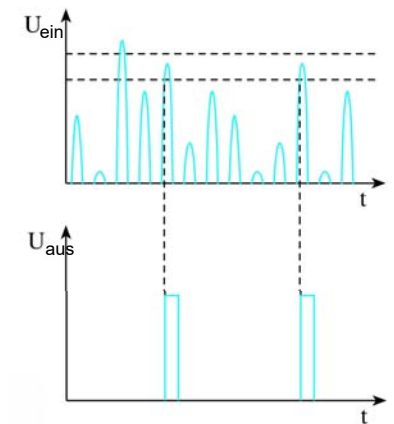
33

## Selektieren von Impulssignalen

### Integraldiskrimination



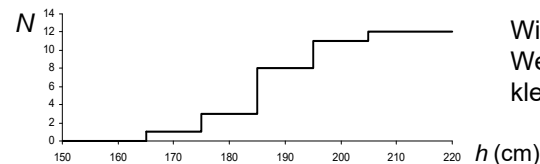
### Differentialdiskrimination



34

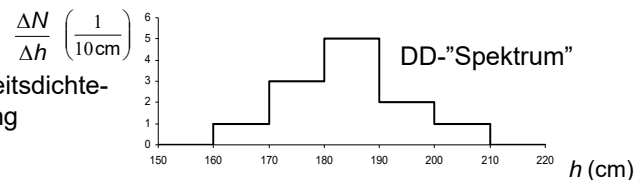
## Summen- (kumulierte/kumulative) Häufigkeitsverteilung

Summen-Häufigkeitsverteilung



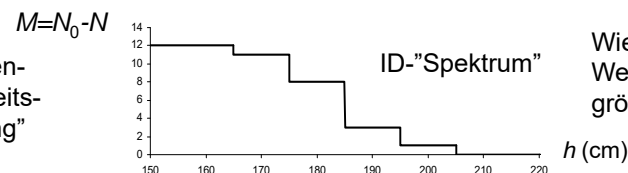
Wieviele Werte sind kleiner als h?

Häufigkeitsdichte-Verteilung



DD-"Spektrum"

"Summen-Häufigkeitsverteilung"

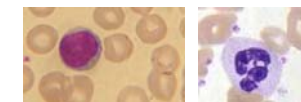


ID-"Spektrum"

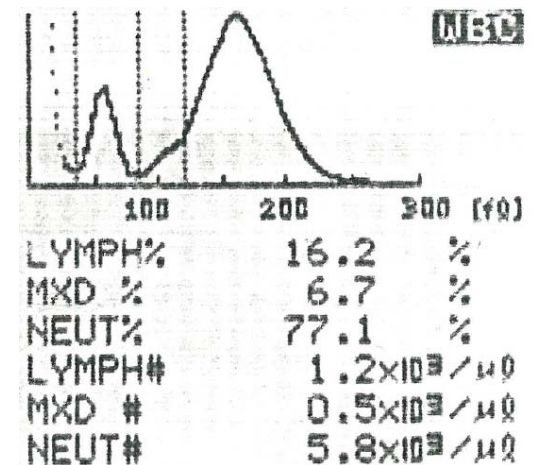
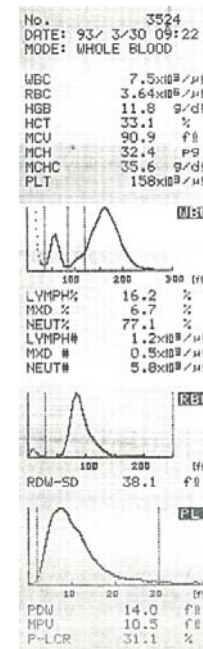
Wieviele Werte sind grösser als h?

35

## Coulter-Zähler (S. Praktikum)



Konzentration von Leukozyten



36