SEMMELWEIS EGYETEM

SHAANXI UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Transzportfolyamatok

folyadéktranszport

Zrínyi Miklós

egyetemi tanár, az MTA rendes tagja

mikloszrinyi@gmail.com

2021

TERMODINAMIKAI RENDSZEREK TIPUSAI

termodinamikai rendszer

időben állandó

időben változó

egyensúlyi

stacionárius

nemegyensúlyi

reaktív

transzportfolyamatok

diffúzió
hővezetés
áramlás

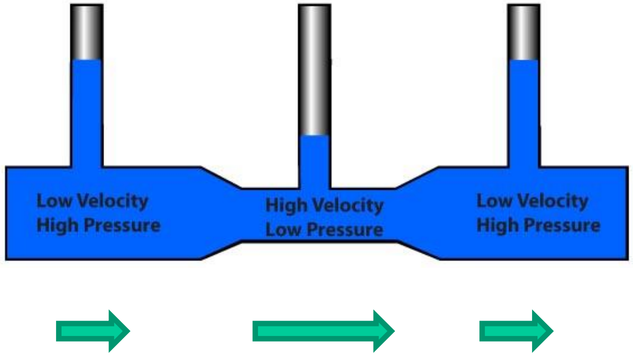
reakciókinetika

sebesség
rendűség
mechanizmus

Fluid rendszerekkel kapcsolatos alapfogalmak

Áramlás

- **lamináris**,
- turbulens,
- Összenyomható: $v_1 A_1 \neq v_2 A_2$
- **Összenyomhatatlan**: $v_1 A_1 = v_2 A_2 = konst.$
- „száraz”,
- **viszkózus,**
- **állandó,**
- pulzáló,
- rotáló.

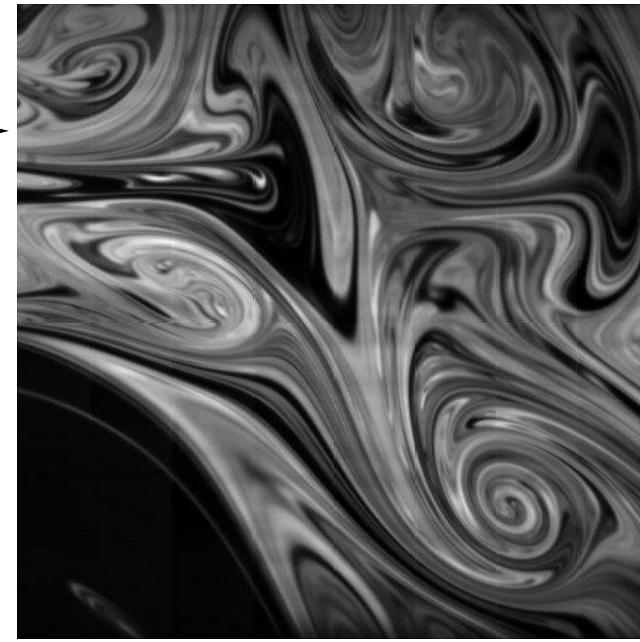


Az áramlás típusai

turbulens

átmenet

lamináris



$$R_e = \left.\frac{tehetetlenségi}{viszkózus}\right\} \text{erők}$$

Osborne Reynolds
1842-1912

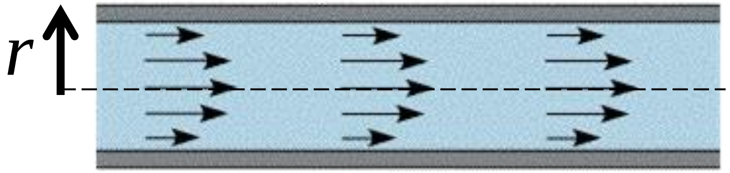
$$\boxed{R_e = \frac{v \cdot \rho \cdot d}{\eta}}$$

v: *átlagos áramlási sebesség*

ρ : *folyadék sűrűsége*

η : *viszkozitás*

d: *átmérő*

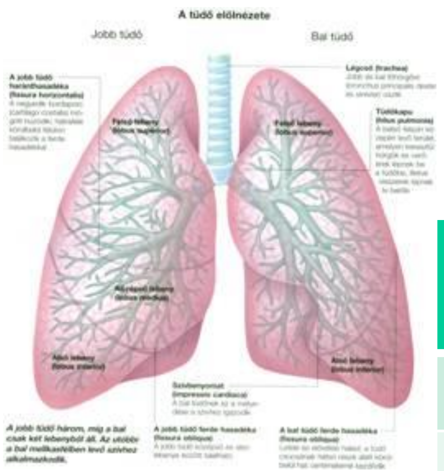


ha $R_e < 2100$

Lamináris áramlás

***Megjegyzés**: ha átmérő helyett sugarat használunk, akkor Re=1150*

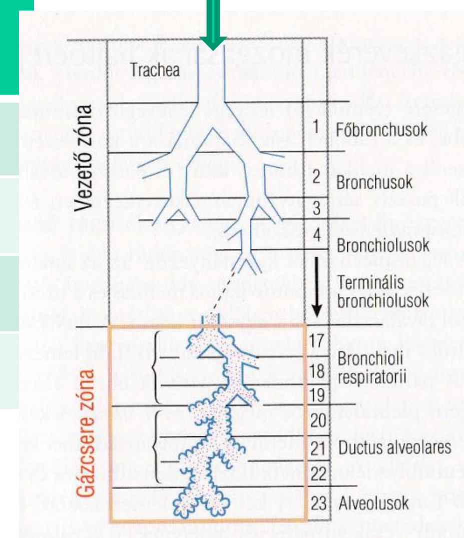
Levegő áramlása a tüdőben



23 generáció a légcsövek átmérőjében

	Normál légzés 12/perc		Heves légzés 30/perc	
átmérő (cm)	***v* (cm/s)**	**Re**	***v* (cm/s)**	**Re**
1,8	197	2325	790	**9324**
0,56	250	921	1002	**3684**
0,35	161	369	643	1476
0,13	38	32	151	127

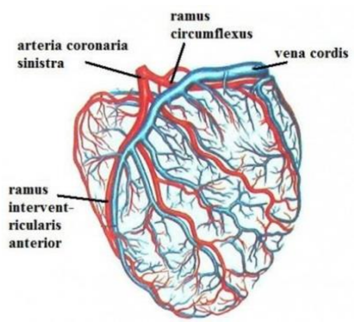
$$I_V = \frac{dV}{dt}$$

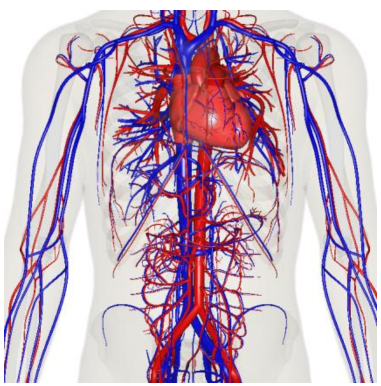


$$\frac{dV_{lev.}}{dt} \approx 5\ L/\min \quad \Rightarrow \quad O_2 \approx 2kg/nap$$

Csak heves légzésnél lép fel turbulencia a vastagabb légcsövekben.

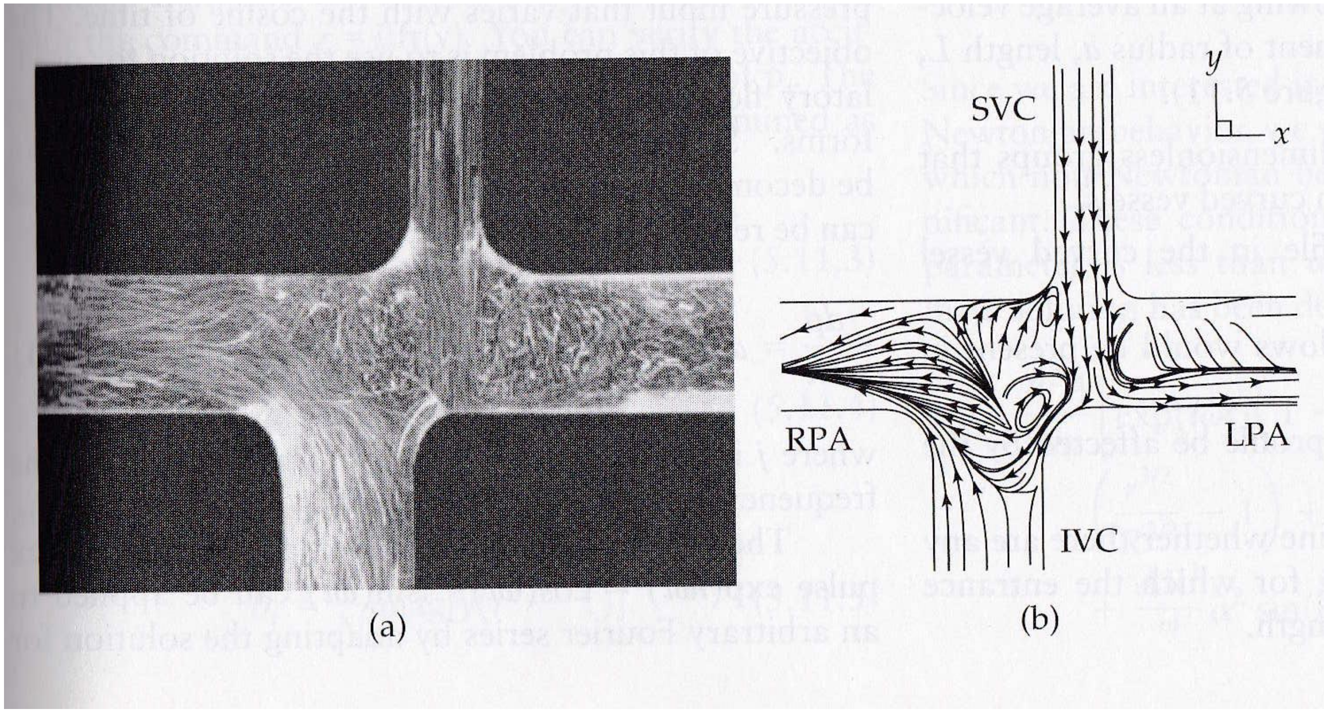
Vér áramlása a szív- és érrendszerben





erek	átmérő cm	Max seb. cm/s	Re Max.	Átl. seb. cm/s	Re átlag
↑ aorta	1,5	120	**4500**	20	750
↓ aorta	1,3	105	**3400**	20	648
femorális artéria	0,4	100	1000	10	100
kapilláris	0,0006	7	0,001	0,02	10^{-6}

A keringési rendszer (cardiovascularis) többségében **az áramlás lamináris.** Kivétel a szívből az aortába kilökődő vér áramlása.



Elágazásoknál és szűkületeknél könnyen kialakulhat turbulencia!

A térfogatáram hajtóereje: a nyomás különbség

$$1\ Hgmm = 133{,}32\ Pa$$

$$1\ atm = 735{,}55\ Hgmm$$

	P/Hgmm
arteriás (szisztolés)	100 -140
arteriás (diasztolés)	60 - 90
kapilláris az artéria végénél	30

Fluidum konvektív térfogati transzport

folyadék gáz

$$j_V = -L \cdot \nabla y$$

$$I_V = \frac{dV}{dt}$$

térfogatáram

$$j_V = \frac{1}{A_S}\frac{dV}{dt}$$

térfogatáram sűrűség

vezetési tényező

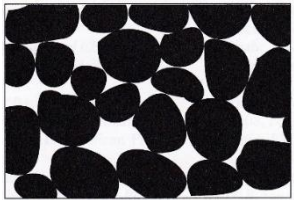
hajtóerő

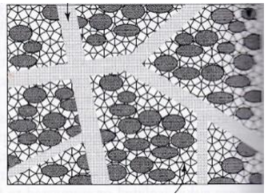
∇P *mechanikai*

∇c *termodinamikai*

korlátozásmentes szabad áramlás

áramlás geometriai akadályokba ütközik
pórusrendszer, gél, membrán, szövet…





$$j_V = ?$$

Konvektív térfogati transzport

$$I_m = \frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = \rho \cdot I_V \qquad \rho = \frac{j_m}{j_V} \qquad \rho = \frac{j_m}{j_V}$$

$$j_m = \frac{I_m}{A_s} = \frac{1}{A_s}\frac{dm}{dt} = \frac{\rho}{A_s}\frac{dV}{dt} = \frac{\rho}{A_s} \cdot I_V = \frac{\rho}{A_s}\frac{A_s dx}{dt} = \rho v \qquad \frac{dx}{dt} = v \qquad dV = A_S \cdot dx$$

$$j_V = \frac{I_V}{A_s} = \frac{1}{A_s}\frac{dV}{dt} = \frac{A_s}{A_s}\frac{dx}{dt} = \frac{j_m}{\rho} = v$$

$$j_V = -L_V \nabla p$$

Hidraulikus permeábilitás

$$\boxed{j_V = v} \qquad j_V \left[ms^{-1} \right]$$

Abban az esetben, ha a folyadék c koncentrációban tartalmaz oldott anyagot, akkor ennek az anyagnak a tömegáram-sűrűsége:

$$j_m = v \cdot c$$

Fluidum szabad áramlása, a Bernoulli törvény

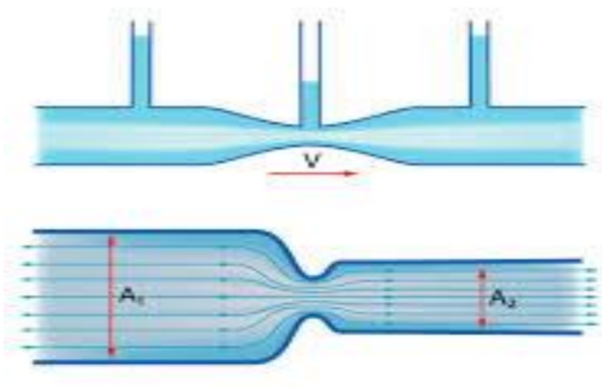
$$m\frac{dv}{dt} = -A_s dp \qquad \rho A_s dx\frac{dv}{dt} = -A_s dp \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot v = \frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\left(\rho\frac{v^2}{2} + p\right) = 0 \qquad \rho\frac{v^2}{2} + p = konst. \qquad \frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = konst.$$

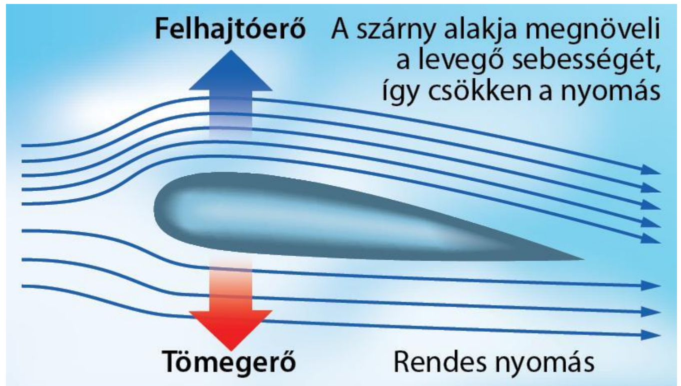
$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \frac{\rho}{2} dv^2 = -dp \qquad \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) = \left(p_2 - p_1\right)$$

$$p + \frac{1}{2}\rho v_x^2 + \rho g h = konst.$$

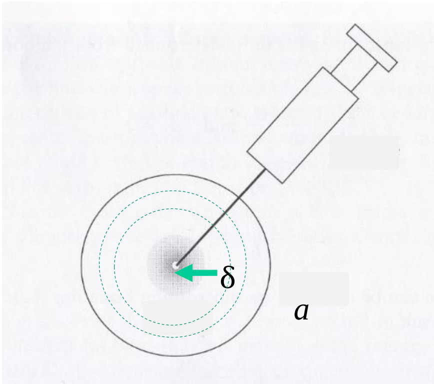
Bernoulli egyenlet
1700-1782



$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right]$$



A Bernoulli egyenlet nem alkalmazható olyan esetekben, amikor a folyadék szabad áramlását különböző geometriai korlátozások befolyásolják



Konvektív folyadék áramlás szövetbe

$$\boxed{j_V = v = -L_V \cdot \nabla p}$$

filtrációs koefficiens

$$\frac{\partial m}{\partial t} = I_m(r) - I_m(r+\Delta r)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{I_m(r) - I_m(r+\Delta r)}{4r^2\pi\Delta r}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{-1}{4r^2\pi}\cdot\frac{I_m(r+\Delta r) - I_m(r)}{\Delta r}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{-1}{4r^2\pi}\cdot\frac{dI_m(r)}{dr} \qquad I_m(r) = 4\pi \cdot r^2 j_m(r)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 j_m)}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{L_V}{r^2}\frac{\partial(r^2\frac{dp}{dr})}{\partial r}$$

$$v = j_r$$

Egyenletes áramlásnál: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial(r^2\frac{dp}{dr})}{\partial r} = 0$

$$\frac{\partial^2(rp)}{\partial r^2} = 0 \qquad p(r) = -\frac{k_1}{r} + k_2 \qquad k_1 = ak_2$$

$$k_2 = -\frac{I}{4\pi L_V a} \qquad k_1 = -\frac{I}{4\pi L_V} \qquad p(r) = \frac{I}{4\pi L_V}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$$\boxed{v_r = \frac{I}{4\pi r^2}}$$

A radiális irányú sebesség profil nem lineáris, a sebesség a középponttól távolodva egyre lassúbb lesz és a folyadék sebessége nem függ a fecskendő tűjének a belső átmérőjétől,

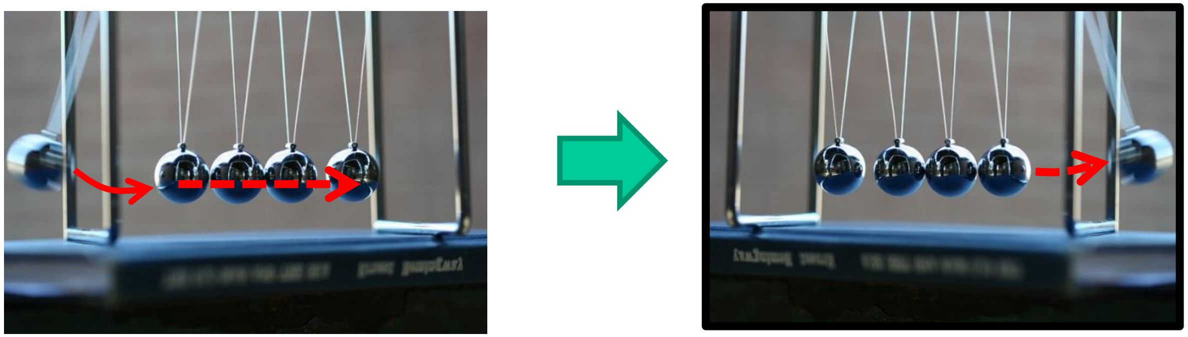
A különböző anyagi rendszerek folyásával foglalkozó tudományt 1928-ban Bingham javaslatára nevezték el reológiának.

(Rheos logos = folyástan)

Eugene Cook Bingham

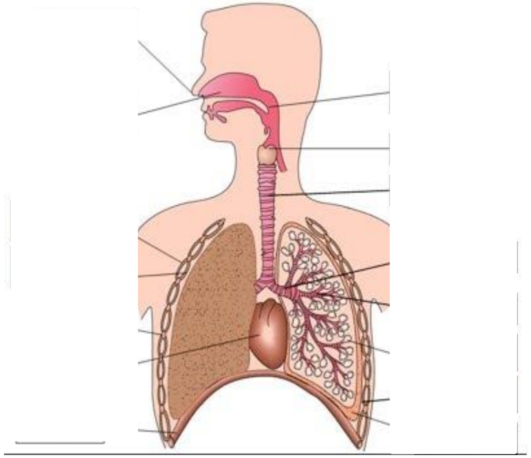
REOLÓGIA

(*konduktív impulzustranszport*)

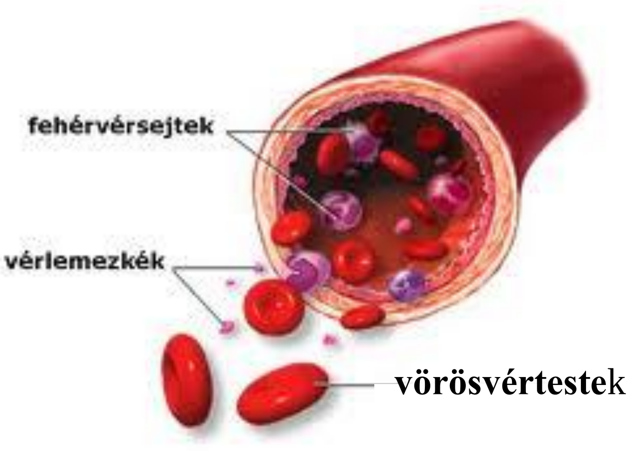


(Rheos logos = áramlástan)

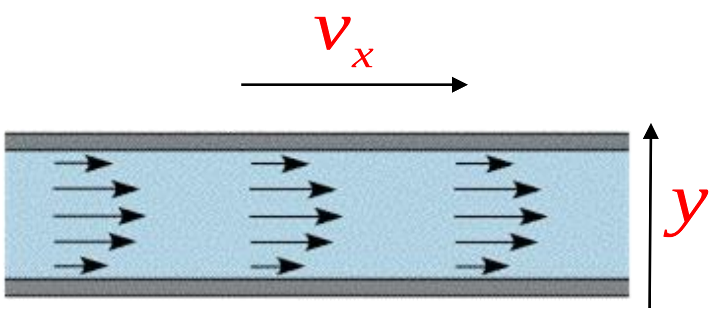
Légzés

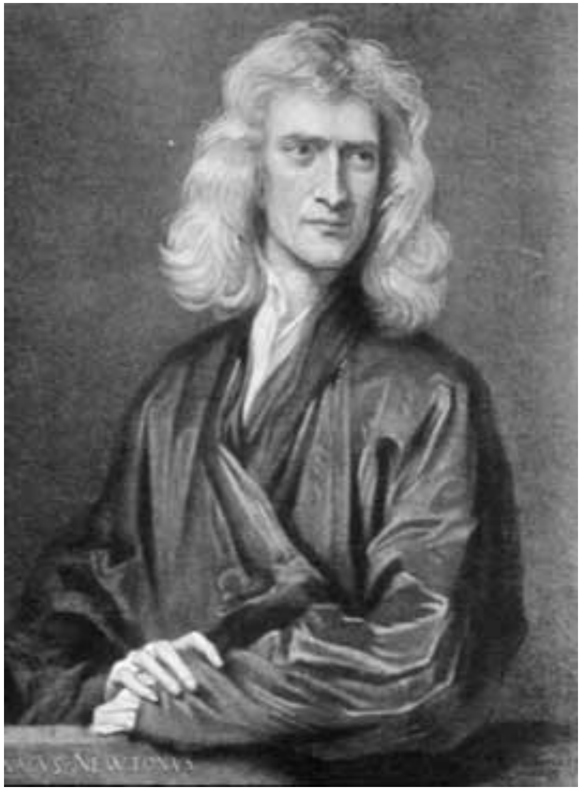


Vérkeringés



Konduktív impulzustrannszport leírása

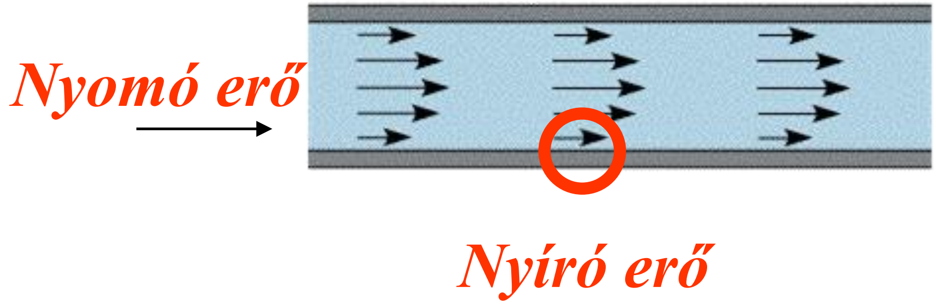




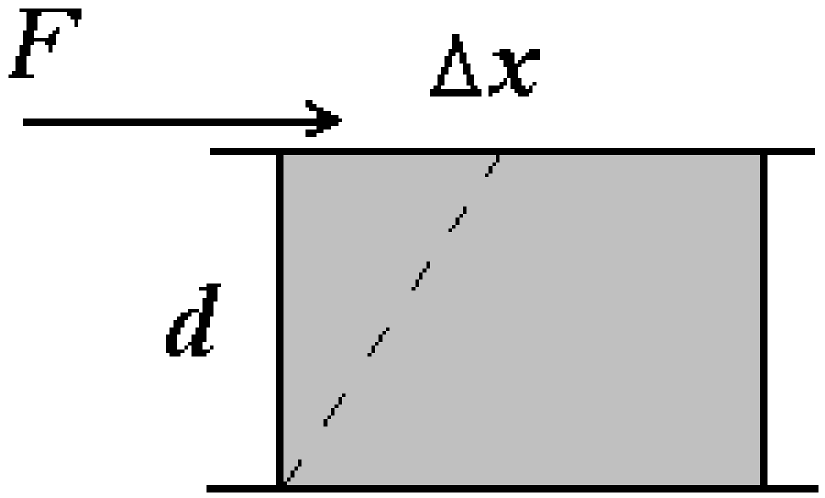
Sir Isac Newton (1642-1727)

reológia
impulzus áram
∇v
$j_i = -\eta \nabla v$
$j_i = -\eta \dfrac{dv_x}{dy}$

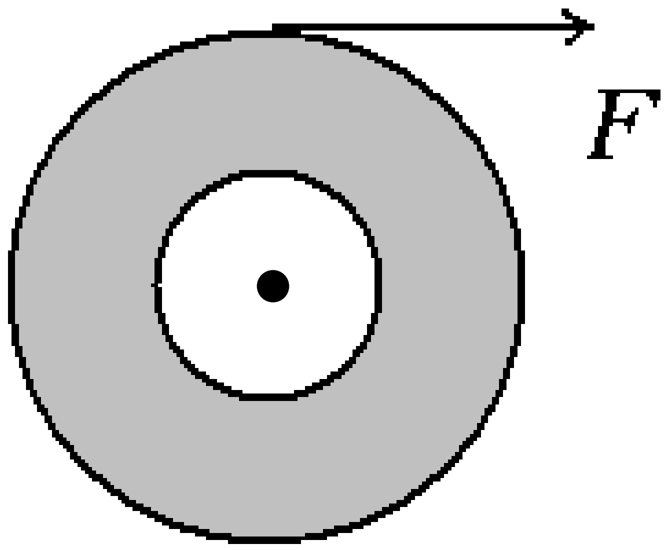
Alapfogalmak:



Nyírás*:** tangenciálisan ható (nyíró***)erő (F) vált ki deformációt.



Tiszta nyírás

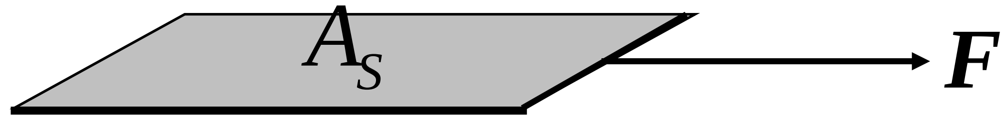


Rotációs nyírás

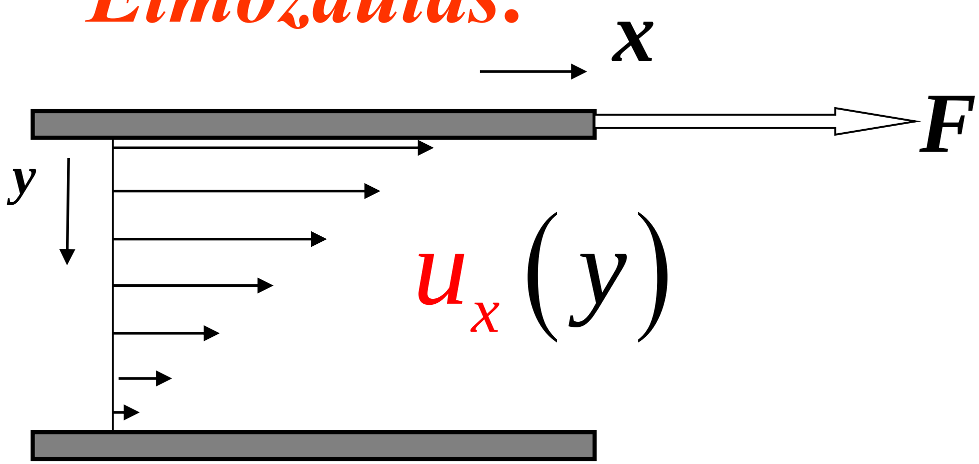
Alapfogalmak:

Nyírófeszültség:

$$\tau = \frac{F}{A_S}$$



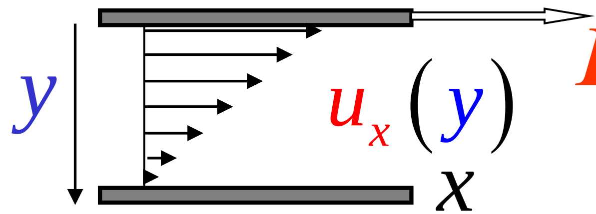
Elmozdulás:



Deformáció:

$$\gamma = \frac{du_x(y)}{dy}$$

Alapfogalmak:



Deformáció:

$$\boxed{\gamma = \frac{du_x}{dy}}$$

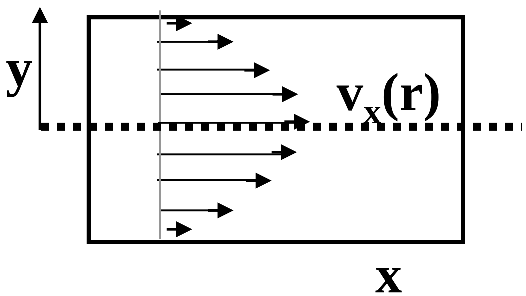
Deformáció sebesség:

$$\boxed{\frac{d\gamma}{dt}}$$

$$\boxed{\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{du_x}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{du_x}{dt}\right) = \frac{dv_x}{dy}}$$

*A **deformáció sebesség** megegyezik a **sebesség gradienssel**!*

A reológia alapösszefüggése. Newton egyenlet



$$j_i = -\eta \frac{dv_x}{dy}$$

$$\boxed{\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}}$$

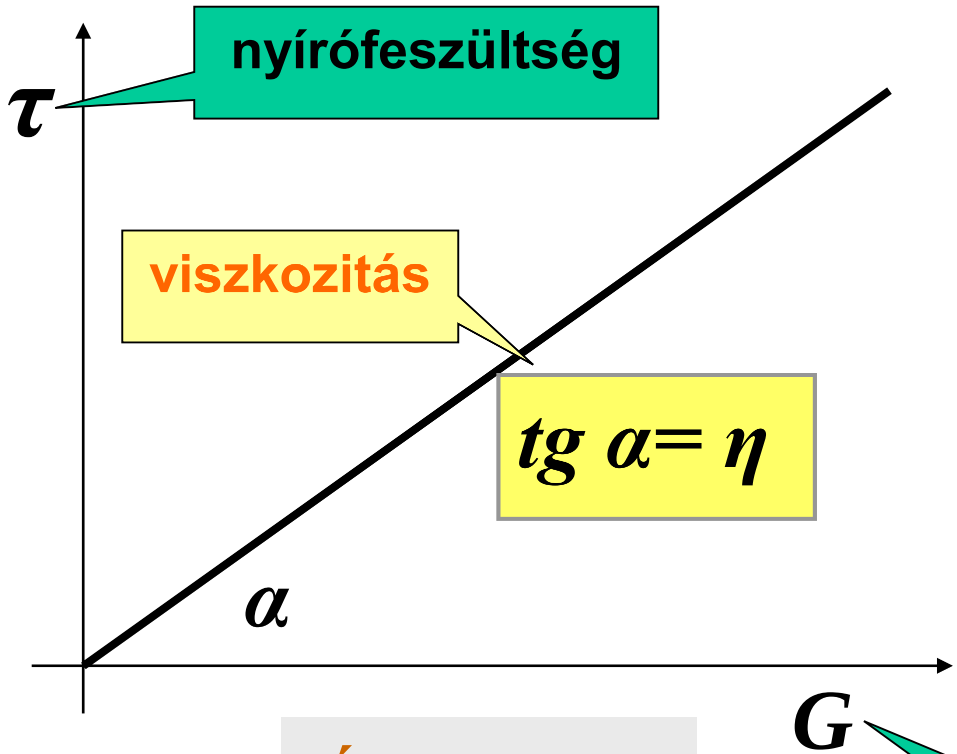
Kapcsolat a nyírófeszültség és a sebesség gradiens között:

Nyírófeszültség: $\boxed{\tau = \frac{F}{A_S}}$

Sebesség gradiens:

$$\boxed{G = \frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta v_x}{r}}$$

Newtoni folyadék folyásgörbéje



$$\tau = \eta \cdot G$$

$[Pa]$ $[Pa \cdot s]$ $[s^{-1}]$

víz,

tej,

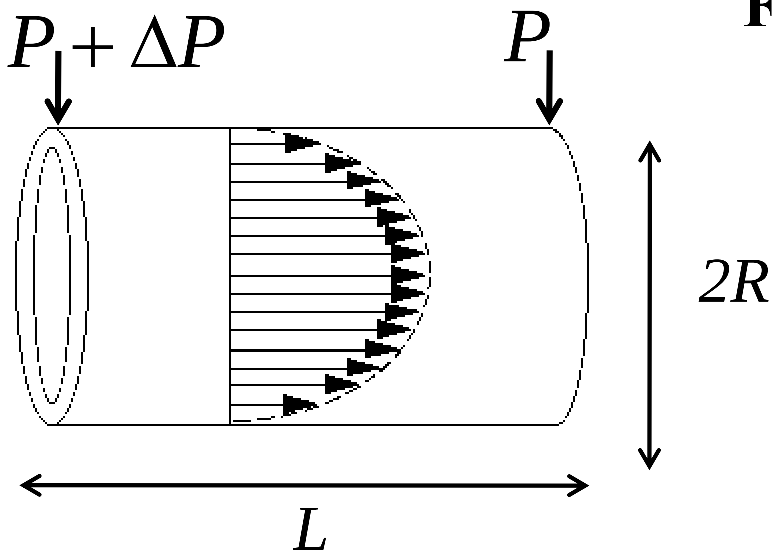
cukor oldat,

étolaj

sebesség gradiens
vagy
deformáció sebesség

Folyadék áramlása kapillárisban

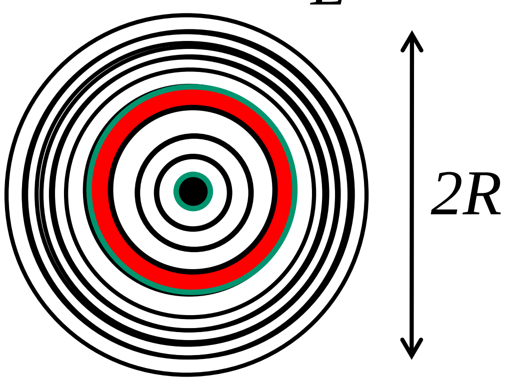
áramlási profil



$$\tau = \eta \cdot \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}$$

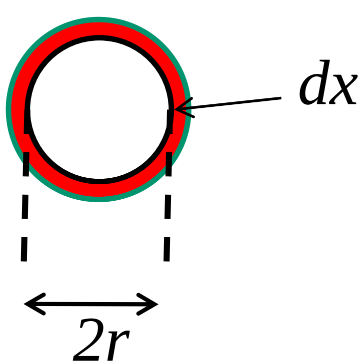
$$\tau = \frac{r^2\pi \cdot dP}{2r\pi \cdot dx} = \frac{r}{2} \cdot \frac{dP}{dx} = -\frac{r}{2}\frac{\Delta P}{L}$$

$$dv_x = \frac{\tau}{\eta} dr = -\frac{\Delta P}{2L\eta} \cdot r \cdot dr = -\frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot d\left(r^2\right)$$



$$v_x(r = R) = 0$$

$$v_x\left(r\right) = -\frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot r^2 + konst.$$



$$\boxed{v_x(r) = \frac{\Delta P}{4L\eta} \cdot \left(R^2 - r^2\right) = \frac{\Delta P R^2}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$$

$$v_x(r) = \frac{\Delta P R^2}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Áramlási profil

$$v_{max} = v(r=0)$$

$$\boxed{v_x(r) = v_{max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{max} = \frac{R^2}{4\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}}$$

A térfogatáram

$$I_V = 2\pi \cdot \int_0^R r \cdot v_x(r) \cdot dr \qquad I_V = 2\pi \cdot \int_0^{R_0} r \cdot v_{max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot dr$$

$$\boxed{I_V = \frac{\pi \cdot R_o^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}}$$

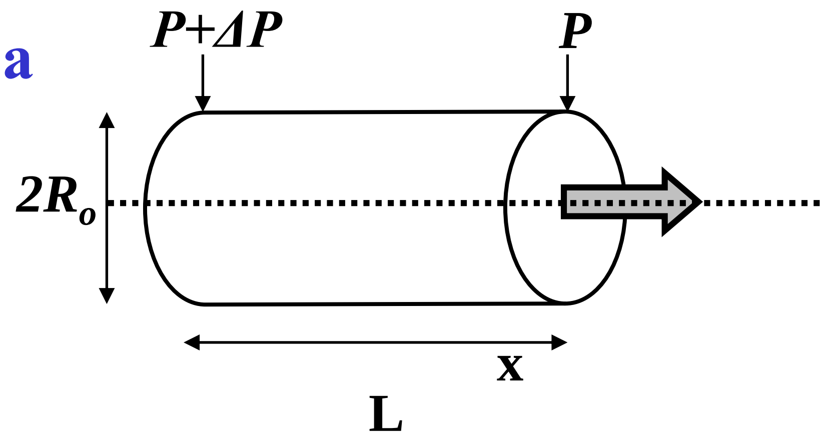
Hagen-Poiseuille törvény

Átlagos áramlási sebesség

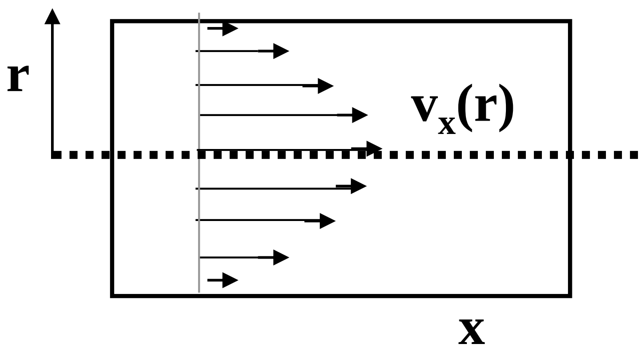
$$\boxed{\langle v_x \rangle = \frac{I_V}{R_o^2 \pi} = \frac{R_0^2}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L} = \frac{1}{2} v_{max}}$$

Newtoni folyadék lamináris áramlása

(összefoglalás)



Parabolikus sebesség profil

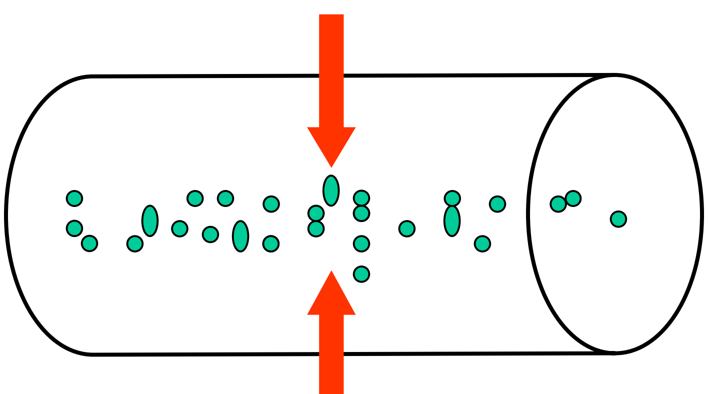


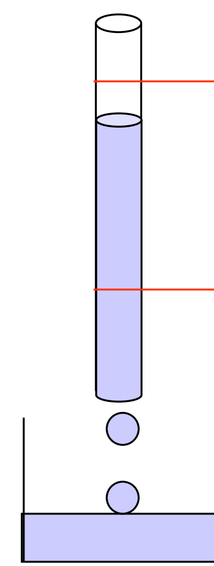
$$v(r) = \frac{\Delta P R_0^{\,2}}{4L\eta} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R_0^{\,2}}\right)$$

Hagen-Poiseuille törvény

$$I_V = \frac{\pi \cdot R_o^{\,4}}{8\eta} \cdot \frac{\Delta P}{L}$$

Térfogatáram



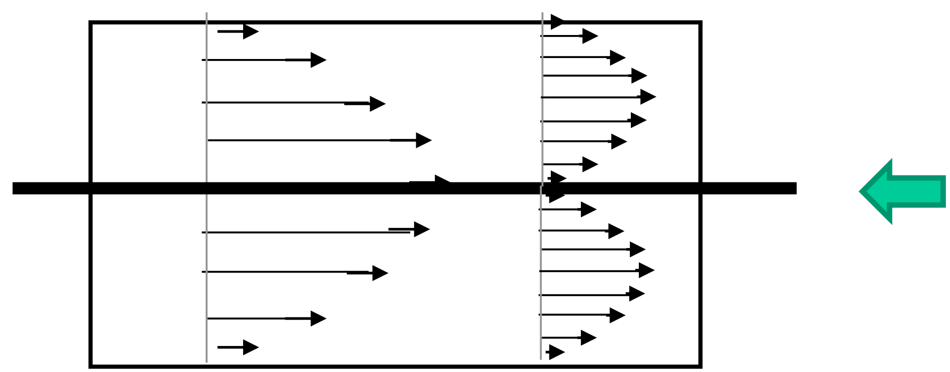


$p + \frac{1}{2}\rho v_x^2 + \rho g h = const$ Bernoulli törvény

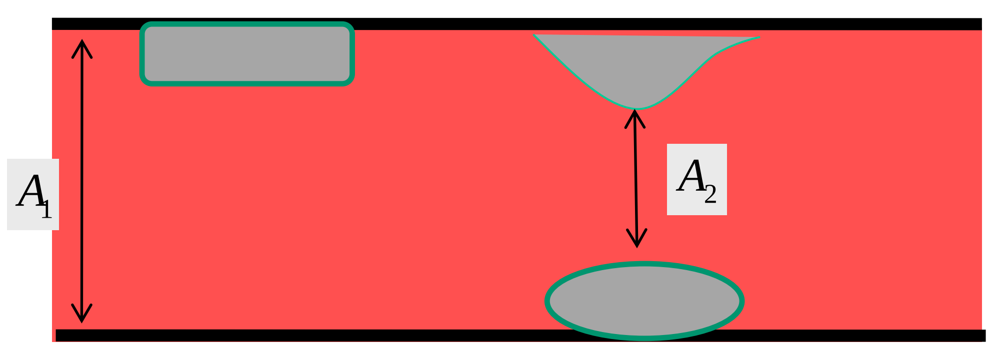
Hagen-Poiseuille törvény jó közelítéssel alkalmazható a vérkeringésre

A szervezet az erek átmérőjének változtatásával biztosítani tudja az egyes szervek vérellátását.

Parabolikus sebesség profil módosulása



katéter



turbulens

Dinamikai viszkozitás (általában ezt értjük viszkozitás alatt
pascal secundum (Pa·s)

Régebben Jean Louis Marie Poiseuille (1797-1869) tiszteletére használták a

1 poise = 100 centipoise = 0.1 Pa·s.

Az orvosi gyakorlatban ma is gyakran a cP (centi-poise)-t használják

Fluiditás a viszkozitás reciproka

Kinematikai viszkozitás: a dinamikai viszkozitás és a sűrűség hányadosa *($m^2\ s^{-1}$) vagy stoke (St).*

Néhány folyadék viszkozitása

anyag	**T/ °C**	**viszkozitás** $/mPa \cdot s$
víz	20	1,0
glicerin	20	1500
n-pentán	20	0,23

biofolyadék	**T/ °C**	**viszkozitás** $/mPa \cdot s$
vér	37	4 (nem Newtoni !)
vér plazma	37	1,5
könny	37	0,73 – 0,97
levegő	18	0,018
liquor	20	1,02

Relativ viszkozitás (η_{rel}).

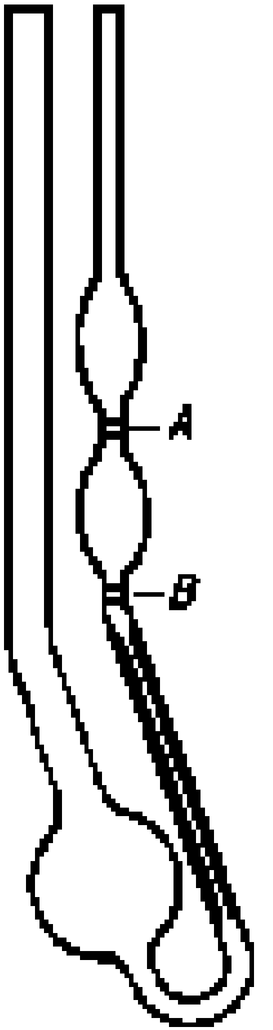
$$\eta_{rel} = \frac{\eta}{\eta_o} = \frac{t}{t_o}$$

oldat

oldószer

Specifikus viszkozitás (η_{sp})

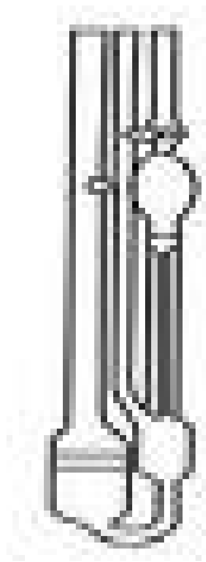
$$\eta_{sp} = \eta_{rel} - 1$$



Ostwald-féle viszkoziméter

Redukált viszkozitás (η_{red})

$$\boxed{\eta_{red} = \frac{\eta_{sp}}{c}}$$

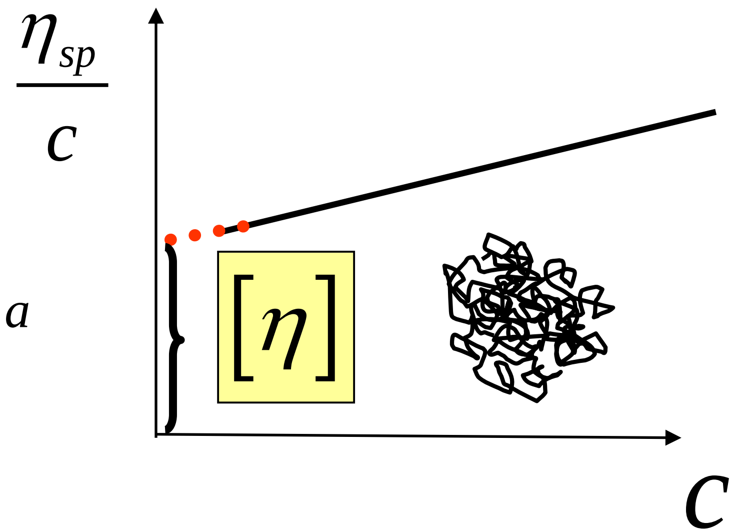


Ubbelohde féle viszkoziméter

Jellemző viszkozitás ($[\eta]$)

$$\boxed{[\eta] = \lim_{c \to 0} \eta_{red}}$$

$$[\eta] = k \cdot M^{a}$$



Jellemző viszkozitás ($[\eta]$)

Molekula	konformáció	$[\eta]$ [*ml/g]*	M
mioglobin	globula	3.1	17800
mioglobin	gombolyag	21	17800
hemoglobin	globula	3.6	64450
hemoglobin	gombolyag	19	64450
Szérum albumin	globula	3.7	67500
Szérum albumin	gombolyag	51	67500

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

$$f_S = 4R^2\pi \cdot \tau$$

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{v}{R}$$

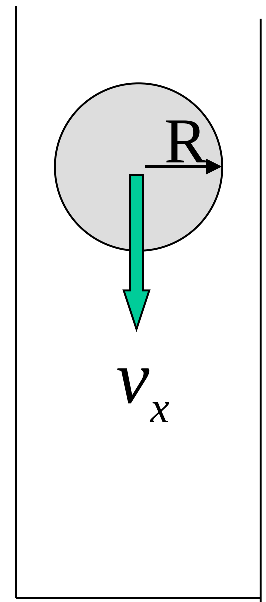
$$f_S = 4R^2\pi \cdot \eta \cdot \frac{v}{R}$$

$$\boxed{f_S = 4\pi\eta R v_x}$$

Stokes törvény:

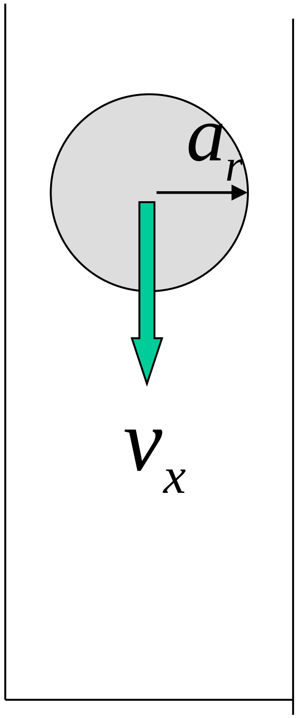
$$\boxed{f_\eta = 6\pi\eta R v_x}$$

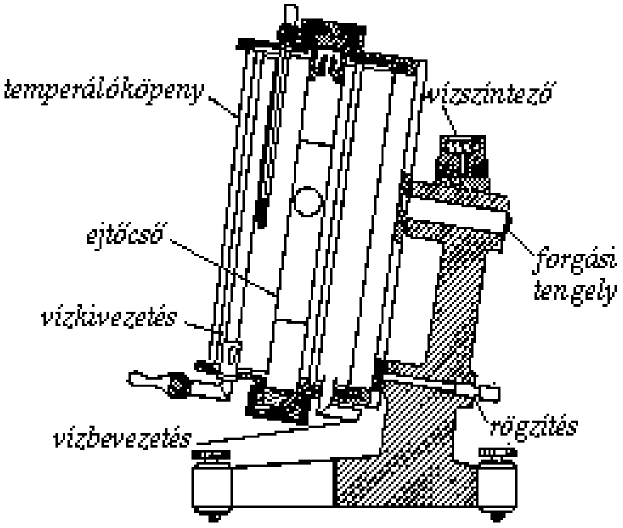
George Stokes
1819-1903

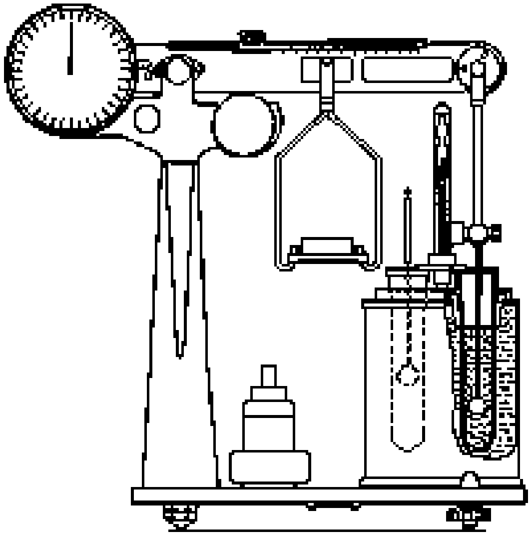


$$\boxed{f_g = f_\eta} \Rightarrow \boxed{v_x = \frac{2}{9}\frac{R^2 \Delta\rho g}{\eta}}$$

$$f_\eta = 6\pi\eta a_r v_x$$

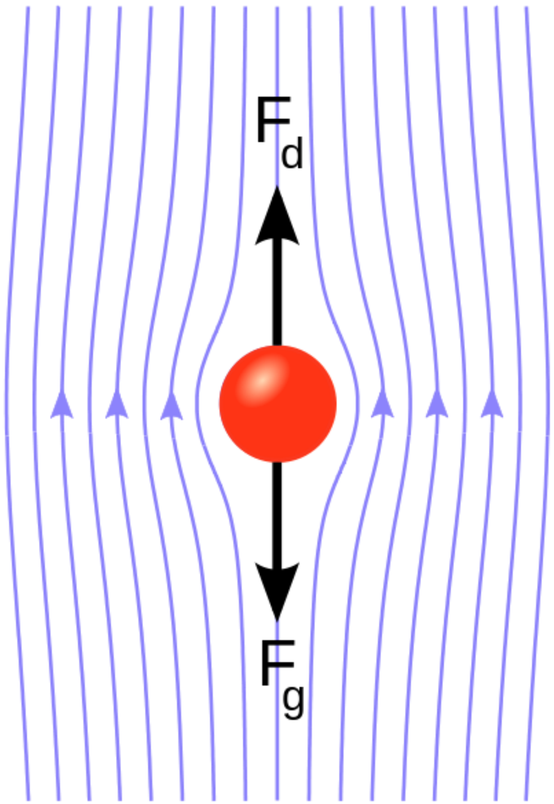


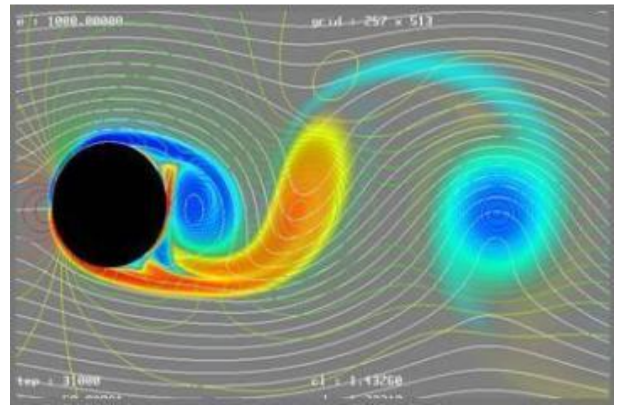


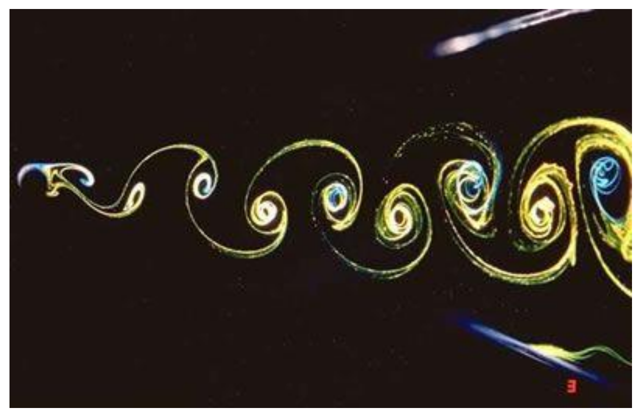


Höppler féle viszkoziméter

Kármán örvénysor







Kármán Tódor
1881-1963

laminaris

$R_e < 2100$

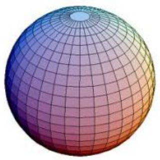
turbulens

$R_e >> 2100$

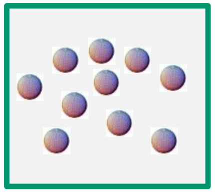
Híg szuszpenziók viszkozitása

Általában *newtoni* viselkedés

Einstein-egyenlet

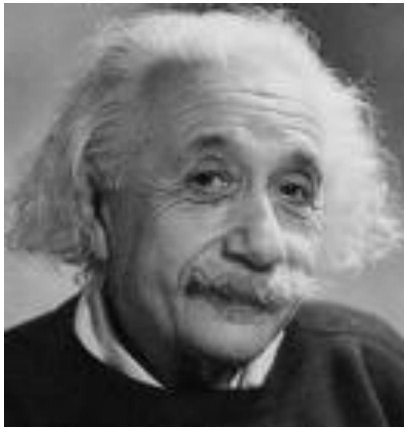


$$\left[\eta\right] = 2.5\Phi$$



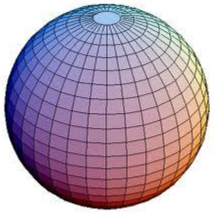
$$\eta = \eta_o\left(1 + 2.5\Phi\right)$$

Térfogati tört



Albert Einstein
1879-1955

Einstein-egyenlet általánosítása:



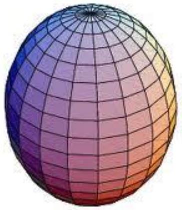
$$[\eta] = \nu_a \Phi$$

$$\eta = \eta_o (1 + \nu_a \Phi)$$

Aszimmetria faktor

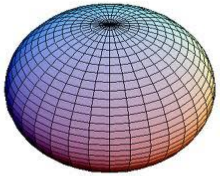
$$\nu_a = \frac{(a/b)^2}{15\left[\ln\left(\frac{2a}{b}\right) - \frac{3}{2}\right]} + \frac{(a/b)^2}{5\left[\ln\left(\frac{2a}{b}\right) - \frac{1}{2}\right]} + \frac{14}{5}$$

Prolát elipszoid



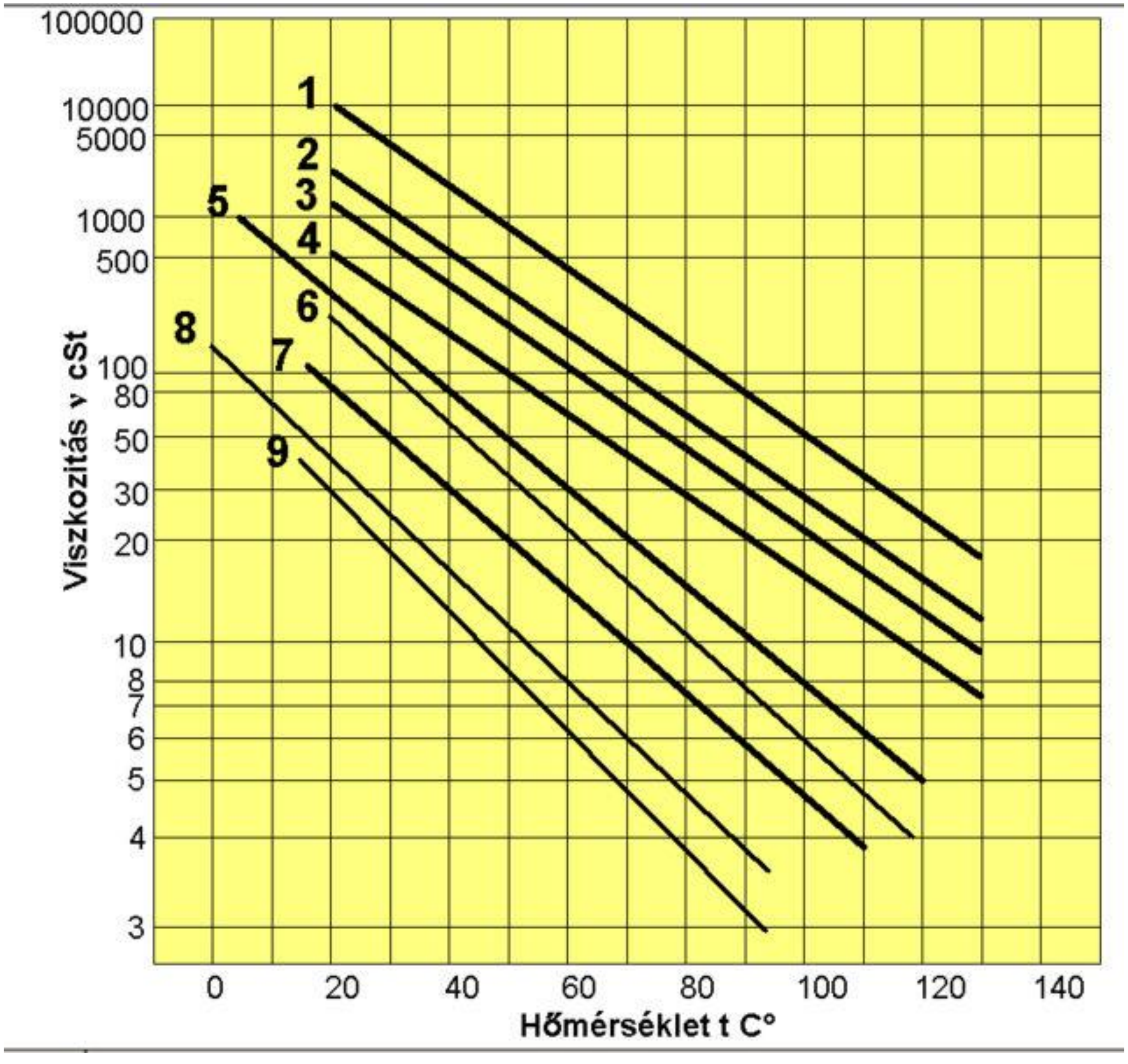
$$\nu_a = \frac{16(a/b)}{15\tan^{-1}(a/b)}$$

Oblát elipszoid



DNS-re: $a/b = 27{,}8 \quad \nu_a = 65{,}2$

A viszkozitás függése a hőmérséklettől:



$$\eta\left(T\right)=\eta_o \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right)$$

Stokes-Einstein törvény:

$$\boxed{D = \frac{k_B T}{6\pi \eta a_r}}$$

Nem newtoni folyadékok

- viszkozitás nagysága az anyagi minőségen kívül a deformációs hatás mértékétől és idejétől is függ.