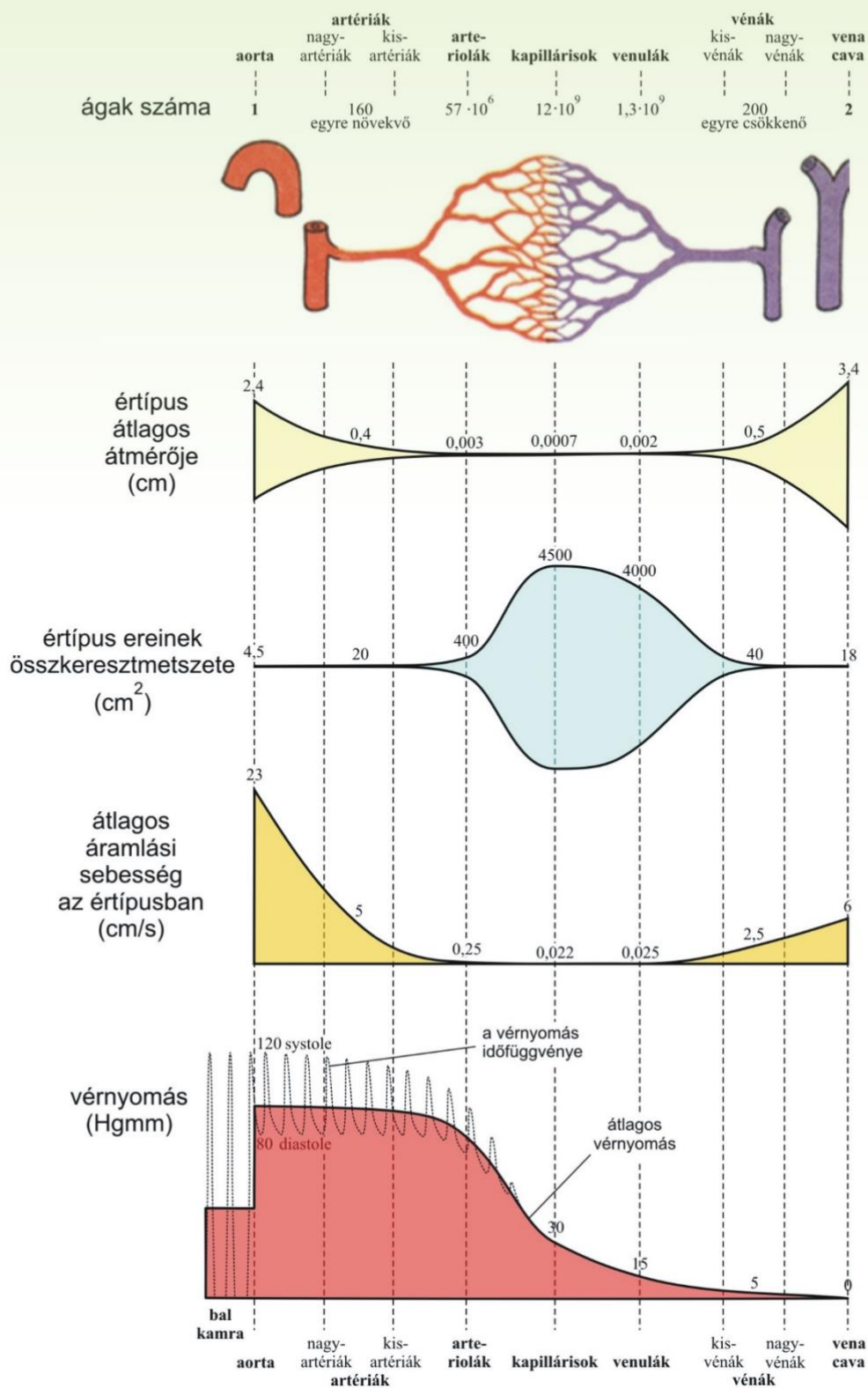


# ÁRAMLÁS

## FOLYADÉKOK ÁRAMLÁSA MEREV FALÚ CSÖVEKBEN ÉS AZ ÉRRENDSZERBEN



## ALAPFOGALMAK

**STACIONÁRIUS ÁRAMLÁS:** Az áramlás paraméterei (pl. a folyadék vagy gáz sebessége, nyomása) időben nem változnak.

**LAMINÁRIS ÁRAMLÁS:** Kis áramlási sebességnél a folyadék vagy gáz mintegy „rétegekben” áramlik, ilyenkor réteges, vagy lamináris áramlásról beszélünk.

**TURBULENS ÁRAMLÁS:** Egy bizonyos kritikus sebességet túllépve bonyolult, rendezetlenül kavargó áramlás lép föl. Az ilyen áramlást gomolygó, örvénylő vagy turbulens áramlásnak nevezzük.

**TÉRFOGATI ÁRAMERŐSSÉG ( $I_V$ ):**

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t},$$

amely azt mutatja meg, hogy  $\Delta t$  idő alatt (pl. egy cső keresztmetszetén) mekkora  $\Delta V$  térfogatú folyadék áramlott át; mértékegysége  $\text{m}^3/\text{s}$ .

**VISZKÓZUS (vagy REÁLIS) FOLYADÉK:** Olyan folyadék, amelyben a belső súrlódás nem elhanyagolható.

**VISZKOZITÁS ( $\eta$ ):** Folyadékok, ill. gázok belső súrlódását jellemző, anyagtól és hőmérséklettől függő együttható. Értéke annál nagyobb, minél nehezebben folyik a közeg. Mértékegysége  $\text{Pa}\cdot\text{s}$ .

**NEWTON-FÉLE SÚRLÓDÁSI TÖRVÉNY:**

$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta h},$$

ahol  $F$  a folyadékrétegre ható nyíróerő,  $A$  az a felület, amelyen ez az erő fellép,  $(\Delta v/\Delta h)$  a sebességesés, azaz a sebességre merőlegesen mért egységnyi távolságra eső sebességváltozás mértéke,  $\eta$  a viszkozitás.

**NEWTONI FOLYADÉK:** Olyan folyadék, amelyre érvényes a Newton-féle súrlódási törvény, tehát amelynek viszkozitása független a sebességesés mértékétől. Ilyen folyadék például a víz.

**HAGEN-POISEUILLE TÖRVÉNY:** Newtoni folyadékok merev csövekben történő stacionárius, lamináris áramlását leíró összefüggés ( $I_V = \Delta p/R_{\text{áraml}}$ ). A térfogati áramerősség ( $I_V = \Delta V/\Delta t$ ) egyenesen arányos az áramlást fenntartó nyomáskülönbséggel ( $\Delta p$ ). Az arányossági tényező az áramlási ellenállásnak ( $R_{\text{áraml}}$ ) a reciproka.

**ÁRAMLÁSI ELLENÁLLÁS vagy a CSŐ ELLENÁLLÁSA:** Egyenesen arányos a cső hosszával ( $l$ ), a közeg viszkozitásával ( $\eta$ ), és fordítottan arányos a cső sugarának ( $r$ ) negyedik hatványával.

$$R_{\text{áraml}} = R_{\text{cső}} = \frac{8 \cdot l \cdot \eta}{\pi \cdot r^4}.$$

A vér, különböző átmérőjű és hosszúságú elágazó csőrendszeren, az érhálózaton keresztül áramlik. Az áramláshoz szükséges nyomáskülönbséget a szív szolgáltatja, amelyhez a két vércső sorosan kapcsolódik. **Mérésünkben** bebizonyítjuk, hogy a térfogati áramerősség egyenesen arányos az áramlást fenntartó nyomáskülönbséggel, kísérletünkben a hidrosztatikai nyomással, illetve a csőugár negyedik hatványával továbbá a mérési adatainkból meghatározzuk a víz viszkozitását. Az erek rugalmasságának nyomáskiegyenlítő hatását a „szélkazan effektus” kísérletében mutatjuk be

## ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÁS

### FOLYADÉKOK ÁRAMLÁSA CSÖVEKBEN

A folyadékok áramlásának egyik fontos jellemzője a **térfogati áramerősség** ( $I_V$ ), amelyet a  $\Delta t$  idő alatt (pl. egy cső keresztmetszetén) átáramlott folyadék  $\Delta V$  térfogata határozza meg, mértékegysége  $\text{m}^3/\text{s}$ :

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t}, \text{ vagy } I_V = \frac{A \cdot \Delta l}{\Delta t} = A \cdot v, \quad (1)$$

ahol  $A$  a cső keresztmetszete,  $\Delta l$  a folyadék elmozdulása,  $v$  pedig a folyadék sebessége az adott keresztmetszeten. (A valódi esetekben átlagsebességet használunk.)

**Stacionárius áramlás** esetén az áramlás paraméterei (pl. a folyadék sebessége, nyomása) az áramlás bármelyik pontján **időben állandók**.

**Kontinuitás elve:** stacionárius áramlás esetén a térfogati áramerősség  $I_V = \text{konst.}$ , hiszen a folyadékok összenyomhatatlanok (azonban gázok áramlása esetén ez nem mindig teljesül, lásd Megjegyzés):

$$I_V = A_1 \cdot \bar{v}_1 = A_2 \cdot \bar{v}_2 = \text{konst.} \quad (2)$$

Ennek alapján a változó átmérőjű cső bármely keresztmetszetén **azonos idő alatt azonos térfogatú folyadék áramlik át** (1. ábra). Következmény: a kisebb keresztmetszetű részen ( $A_1 > A_2$ ) a folyadék nagyobb átlagos sebességgel áramlik ( $\bar{v}_1 < \bar{v}_2$ ), mint a nagyobbban.

**Viszkozitás ( $\eta$ ):** a folyadékok, vagy gázok belső súrlódását a viszkozitással jellemezzük. A 2. ábrán egy folyadék felszínére egy  $A$  felületű lemezt helyezünk el és a lemezt állandó  $F$  nyíróerő hatására  $v$  sebességgel mozgatjuk a felszínen. Ekkor a mozgó felülethez tapadó folyadékréteg szintén  $v$  sebességgel elmozdul az erőhatás irányába. A folyadékrétegek közötti súrlódás következtében az ez alatt lévő réteg is elcsúszik, de már kisebb sebességgel és így tovább mindaddig, míg egy bizonyos  $h$  távolságban a réteg már nem mozdul el. Tehát a mozgó felülettől lefelé haladva egyre kisebb sebességgel csúsznak el egymáson a folyadékrétegek. Ezt a változást az ún. **sebességessel** jellemezzük, amely a sebésre merőlegesen mért egységnyi távolságra eső sebességváltozás mértéke ( $\Delta v / \Delta h$ ). A **Newton-féle súrlódási törvény** kimondja, hogy a folyadékrétegre ható  $F$  nyíróerő arányos az  $A$  felülettel és a sebességesség értékével, ahol az arányossági tényező a **viszkozitás** ( $\eta$ ):

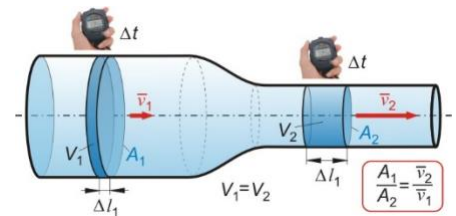
$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta h}. \quad (3)$$

A viszkozitás értéke annál nagyobb, minél nehezebben folyik a közeg, így annál viszkózusabbnak nevezzük az anyagot. Pl. a víznél nehezebben folyik a vér, annál is nehezebben a méz, stb. (3. ábra). A viszkozitás mértékegysége a  $\text{Pa} \cdot \text{s}$ . Ha a viszkozitás független a sebességességtől, **newtoni folyadékról** beszélünk.

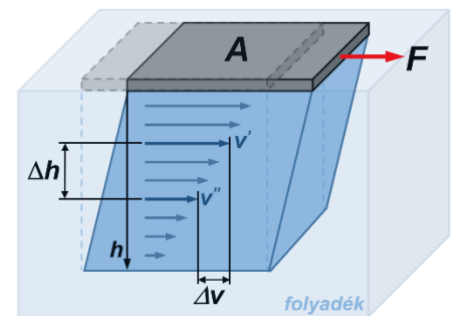
Kapcsolódó részek:  
Damjanovich-Fidy-Szőllősi:  
III /1.

#### Megjegyzés

Normális légzéskor a be-, és kiáramló levegő gyakorlatilag nem nyomódik össze, hiszen a kis nyomáskülönbségek alig változtatják meg a levegő sűrűségét. De pl. köhögéskor, tüdőszéknél a nagyobb nyomáskülönbségek hatására a levegő már összenyomódik.

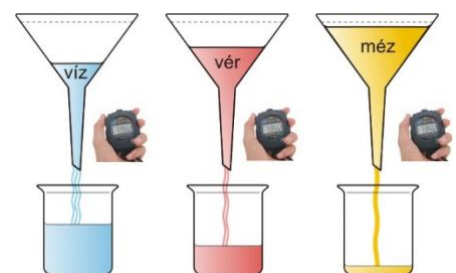


1. ábra. A kontinuitás elve: bármely keresztmetszetben azonos idő alatt azonos térfogatú folyadék áramlik át



2. ábra. A sebességesség szemléltetése.

Ha az  $A$  felületű lemezt a folyadék felszínén  $v$  sebességgel elcsúsztatjuk, akkor az alatta lévő folyadékrétegek a felülettől távolodva egyre kisebb sebességgel mozognak el.



3. ábra. Különböző viszkozitású folyadékok azonos nyílásokon eltérő sebességgel folynak keresztül.

anyag	Viszkozitás, $\eta$ (mPa·s)
levegő	0,02
éter	0,23
víz	1
higany	1,55
vér	2 - 4,5
glicerín	1500

1. táblázat. Néhány anyag viszkozitása  $20^\circ\text{C}$ -on és  $101\text{ kPa}$  nyomáson.

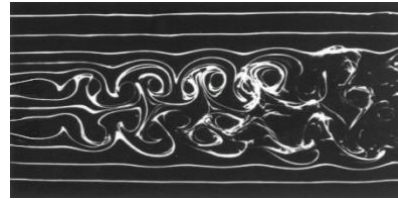
Az áramlás lamináris vagy turbulens mivoltát az áramló folyadékban ébredő tehetetlenségi és belső súrlódási erők határozzák meg. Ezen erők arányát megadja az áramlás paramétereiből képzett dimenzió nélküli, ún. **Reynolds-szám**:

$$Re = \frac{\rho \cdot \bar{v} \cdot r}{\eta} \quad (4)$$

ahol  $\rho$  a folyadék sűrűsége,  $\bar{v}$  a folyadék átlagos sebessége,  $r$  a cső sugara – ezek a tehetetlenséggel állnak kapcsolatban –, ill.  $\eta$  a folyadék viszkozitása, ami a belső súrlódást jellemzi. Mervev, sima falú, kör keresztmetszetű, egyenes csövekben történő áramlás esetén a mérési tapasztalatok szerint  $Re = 1160$  –nál kisebb Reynolds szám esetén a lamináris áramlás a jellemző, míg a nagyobb  $Re$ -számoknál a turbulens áramlás fellépte egyre valószínűbb. Ugyanakkor fontos megjegyezni, hogy a klasszikus fizika törvényei csak a lamináris áramlásra érvényesek, a turbulens áramlás pontos leírását, annak kaotikus mivolta miatt nem lehet egyértelműen megadni. Ezért a gyakorlatban ha  $Re < \approx 1000$ , akkor az áramlás lamináris, ha pedig  $Re > \approx 1000$ , akkor az áramlás egyre nagyobb valószínűséggel turbulens jellegű lesz a csőben. Bár fiziológiásan a szervezetben a réteges áramlások jellemzőek, bizonyos betegségek esetén lecsökkenhet az erek sugara ( $r$ ). Ekkor a fenti képlet alapján a Reynolds szám megnő és az áramlás turbulenssé válhat.

Az auszkultáció (fonendoszkópos) vérnyomásmérés során hallható „Korotkóhangok” keletkezésében is nagy szerepet játszik az *arteria brachialis* elszorítása miatt fellépő turbulencia.

Az áramlási viszonyokat az **áramvonalakkal** szemléltethetjük. Az áramvonalakat láthatóvá is tehetjük, ha a cső valamely keresztmetszetének megfelelő pontjaiba jól látható festéket juttatunk az áramló folyadékba. Mervev falú csőben történő áramlás esetén a festékcsíkok mutatják az áramvonalakat (4. ábra).

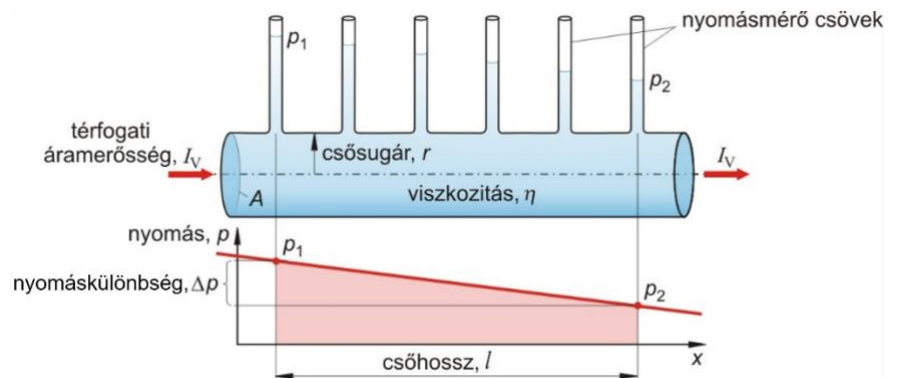


4. ábra. A megfestett folyadék láthatóvá teszi az áramvonalakat

A cső falainál az adhéziós erő miatt **a folyadék a cső falához tapad, ezért itt az áramlási sebesség nulla lesz**. A faltól a cső közepe felé a sebesség fokozatosan (parabolikus jelleggel) növekszik. Kis áramlási sebességnél folyadék nem keveredik, rendezetten, mintegy „rétegekben” áramlik. Ilyenkor réteges, vagy **lamináris áramlásról** beszélünk. Egy bizonyos kritikus sebességet túllépve azonban a cső középső részén örvénylés, keveredés, kaotikus áramlás lép föl. Az ilyen áramlást **turbulens áramlásnak** nevezzük.

**Newtoni folyadékok, és gázok stacionárius, lamináris áramlását merev csőben a Hagen-Poiseuille-törvény írja le:**

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{r^4}{\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l} \quad (5)$$



5. ábra. Viszkózus folyadék, vagy gáz lamináris áramlása nyomáskülönbség hatására.

Tehát egy  $l$  hosszúságú,  $r$  sugarú kör keresztmetszetű csőszakaszban,  $\eta$  viszkozitású folyadék, vagy gáz esetén egy adott  $I_V$  térfogati áramerősség fenntartásához  $\Delta p = (p_1 - p_2)$  statikus nyomáskülönbség szükséges (5. ábra). A (5) összefüggést átrendezve azt kapjuk, hogy **a térfogati áramerősség arányos a nyomáskülönbséggel**:

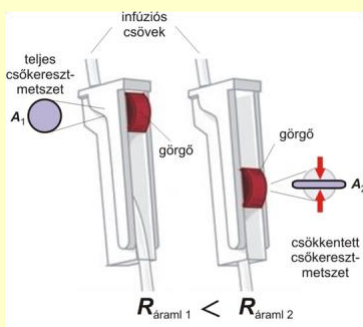
$$I_V = \frac{\Delta p}{\left( \frac{8 \cdot l \cdot \eta}{\pi \cdot r^4} \right)}, \text{ azaz } I_V = \frac{\Delta p}{R_{\text{áraml}}} \quad (6)$$

ahol  $1/R_{\text{áraml}}$  az arányossági tényező. Vizsgáljuk meg a Hagen-Poiseuille-törvény átrendezésével, hogy milyen paraméterektől függ egy cső áramlási ellenállása:

$$R_{\text{áraml}} = \frac{\Delta p}{I_V} = \frac{8 \cdot l \cdot \eta}{\pi \cdot r^4} \cdot \frac{\pi}{\pi} = \frac{8 \cdot l \cdot \eta \cdot \pi}{\pi^2 \cdot r^4} = \frac{8 \cdot l \cdot \eta \cdot \pi}{(\pi \cdot r^2)^2} = 8 \cdot \pi \cdot \eta \cdot \frac{l}{A^2} \quad (7)$$

Láthatjuk, hogy míg a cső hosszúságával ( $l$ ) egyenesen arányos, addig **a cső keresztmetszet ( $A$ ) négyzetével fordítottan arányos az áramlási ellenállás**. Ezért pl. az erek keresztmetszetének kismértékű megváltozása is jelentősen befolyásolja az áramlási ellenállást, azon keresztül pedig a térfogati áramerősséget (7. ábra).

Az infúziós terápiában a térfogati áramerősséget az infúziós szerelék önmagától rögzülő görgős áramlásszabályozójával állítják be. A görgőt lefelé görgretve egyre inkább elszorítja a rugalmas csövet, ezáltal a cső keresztmetszete csökken, ami az áramlási ellenállás növekedéséhez vezet, ezért végül a térfogati áramerősség csökkeni fog (7. ábra).



6. ábra. Az infúziós áramlásszabályozó működése.



## A VÉR ÁRAMLÁSA AZ ÉRRENDSZERBEN

Az ember vérkeringésének motorja a szív, amely a megfelelő nyomáskülönbség előállításával áramoltatja az artériás, ill. a vénás rendszeren keresztül a vért. Pl. az artériás rendszert vizsgálva, az különböző **értípusokra** osztható, úgy, mint **aorta, artériák, arteriolák**. Ezek rendre egyre kisebb átmérőjű, ugyanakkor egyre nagyobb elemszámú érszakaszokra ágaznak szét egészen a **kapillárisokig**. A vénás rendszer fordítva rendezett, a kisebb venulák egyre nagyobb átmérőjű vénákká egyesülnek, míg a két vena cava újra el nem éri a szívet (lásd a címlap ábráját).

A **vér áramlását** azonban csak korlátozottan írja le a Hagen-Poiseuille-törvény, ugyanis az csak a korábban ismertetett feltételek mellett érvényes (newtoni folyadék, stacionárius, lamináris áramlás, merev cső), de a vér áramlása több ponton lényegesen eltér ettől a feltételrendszerétől.

- 1.) A véráramlás — különösen az aortában, kevésbé az artériákban — pulzáló, tehát **nem stacionárius**,
- 2.) a vér alakos elemeket tartalmaz, ezért **nem newtoni** folyadék, viszkozitása az áramlási viszonyoktól függően változik (pl. az aortában  $\eta = 4$  mPas, míg a kapillárisokban  $\eta = 2$  mPas)
- 3.) az erek fala nem merev, hanem **rugalmas** (8. ábra). Ennek az aortánál, ill. a nagyobb átmérőjű artériáknál van szerepe:

**Szisztolé** alatt a balkamra nyomása kinyitja az aortabillentyűt, a vér beáramlik az aortába ( $I_V$ ) és a nagyvérkör áramlási ellenállása ( $R_{áraml}$ ) miatt az aortában megnő a nyomás ( $\Delta p = I_V \cdot R_{áraml}$ ). Ez a megnövekedett nyomás a rugalmas falú aortát és a nagyobb artériákat kitágítja.

**Diasztolé** alatt az aortabillentyű lezár és a rugalmasan kitágult falú aortában előzőleg kialakult nyomás ( $\Delta p$ ) hajtja a vért az érrendszerbe ( $I_V = \Delta p / R_{áraml}$ ).

(Merev falú erekben — diasztolé esetén, az aortabillentyű zárása után — nullára csökkenne a nyomás, így a vér áramlása is szünetelne!)

Érdekes a mechanikai energiák egymásba alakulását is nyomon követni:

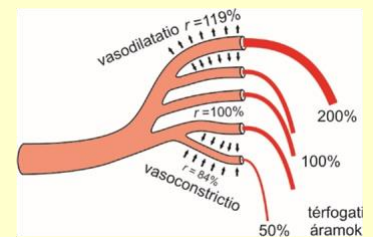
- A szisztolé során a kamrai szívizom által végzett munka egy része az aorta-billentyű nyitása után az aortába áramló vér mozgási energiájává alakul.
- Majd ennek az energiának egy része, ahogy a nagyerek rugalmasan kitágulnak, az érfalak rugalmas potenciális energiájává alakul.
- A diasztolé alatt ez a kitágult (megnyújtott) érfalban tárolt rugalmas potenciális energia ismét az áramló vér mozgási energiájává alakul.

Összefoglalva, az éfalrugalmasság következtében (ún. szélkazán funkció) csillapodnak a szív által előidézett pulzáló nyomáshullámok (lásd a címlap alsó ábráját) ezért a véráram térfogati áramerőssége megnövekszik, és egyenletesebbé válik. Az erek rugalmasságának hatását bemutató kísérletben demonstráljuk (1. bemutató kísérlet).

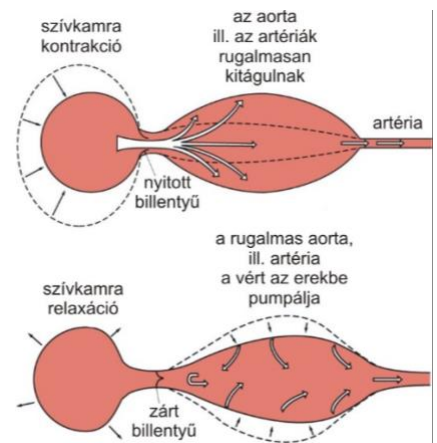
Az erek sugarának idegi szabályozhatósága drámai hatással van az erek áramlási ellenállására (6. ábra).

Az arteriolák akár 50 % sugárnövekedésre is képesek (vasodilatatio). Mivel a Hagen-Poiseuille-törvényben a sugár a negyedik hatványon szerepel, ezért ugyanolyan nyomáskülönbség és viszkozitás mellett a térfogati áramerősség  $1,5^4 \approx 5$ -szöröse nőhet.

Ellenpéldaképpen egy 16 %-os sugár-csökkenéssel járó érszűkület már felére csökkenti a vér átáramlását az adott szakaszon. Ebben az esetben a vér eredeti áramlása csak kétszer akkora vérnyomásértéknél állna helyre.



7. ábra. Az erek sugarának csekély megváltozása is jelentős térfogati áramváltozással jár.



8. ábra. Az erek rugalmasságának szerepe (szélkazán funkció)

## A MÉRÉS MENETE

### 1. Bemutató kísérlet:

#### SZÉLKAZÁN EFFEKTUS,

#### AZ EREK RUGALMASSÁGÁNAK SZEREPE PULZÁLÓ VÉRKERINGÉSNÉL

Hasonlítsuk össze egy egyszerű mechanikai modell segítségével a pulzáló és a stacionárius áramlás hatását (azonos hosszúságú, ill. azonos belső átmérőjű) rugalmas, illetve merev falú gumicső esetén. A rugalmas falú cső nagyobb térfogati áramerősséget produkál.

### 2. Bemutató kísérlet:

#### A HAGEN-POISEUILLE-TÖRVÉNY IGAZOLÁSA,

#### A TÉRFOGATI ÁRAMERŐSSÉG FÜGGÉSE A CSŐ SUGARÁTÓL

A 9. ábrán látható áramlási modell segítségével határozzuk meg az egyes eltérő sugarú ( $r_1, r_2, r_3, r_4$ ) csöveken átfolyó víz térfogati áramerősségét ( $I_V$ ) állandó hidrosztatikai nyomás ( $\Delta p_{\text{atl}}$ ) esetén. Az áramlást a hengeres folyadéktartály és a kifolyó közötti vízszintes sárgarézs csöveken keresztül a folyadékoszlop hidrosztatikai nyomása ( $\Delta p_{\text{atl}}$ ) biztosítja. Adott kezdeti és végső folyadékoszlop magasságok ( $h', h''$ ) között mérjük meg stopperórával mind a négy cső esetén ugyanakkora térfogatú ( $\Delta V$ ) víz átfolyási idejét ( $\Delta t$ ). Eredményeinket a jegyzőkönyvben rögzítjük!

A kiértékeléshez használt képletek:

- Az átfolyt térfogat:

$$\Delta V = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot (h' - h'')$$

- A folyadékoszlop átlagos magassága:

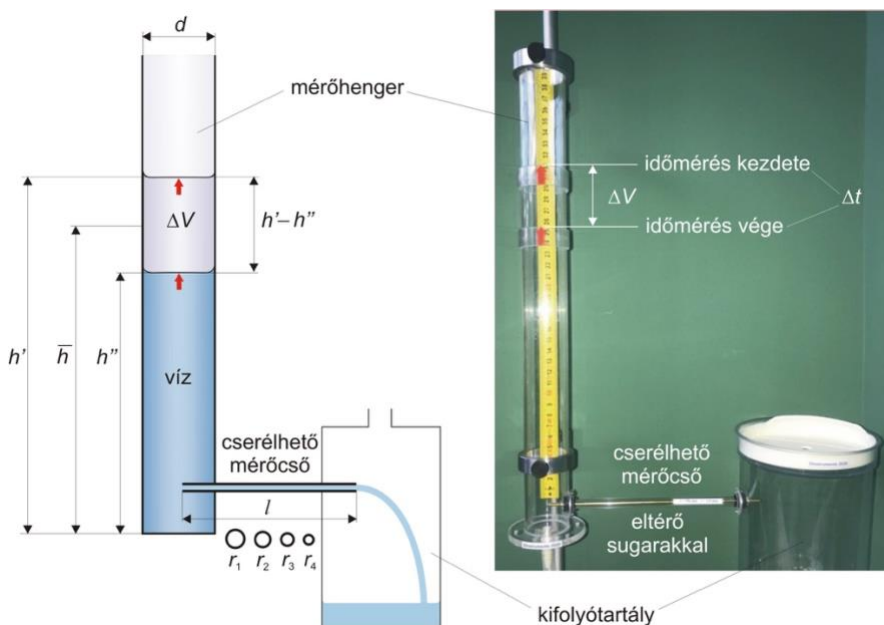
$$\bar{h} = \frac{(h' + h'')}{2}$$

- Az átlagos nyomáskülönbség:

$$\Delta p_{\text{atl}} = \rho \cdot g \cdot \bar{h}$$

- A viszkozitás:

$$\eta = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot \Delta p_{\text{atl}}}{8 \cdot I_V \cdot l}$$



9. ábra. A Hagen-Poiseuille törvény igazolására használt áramlási modell vázlata és fényképe.

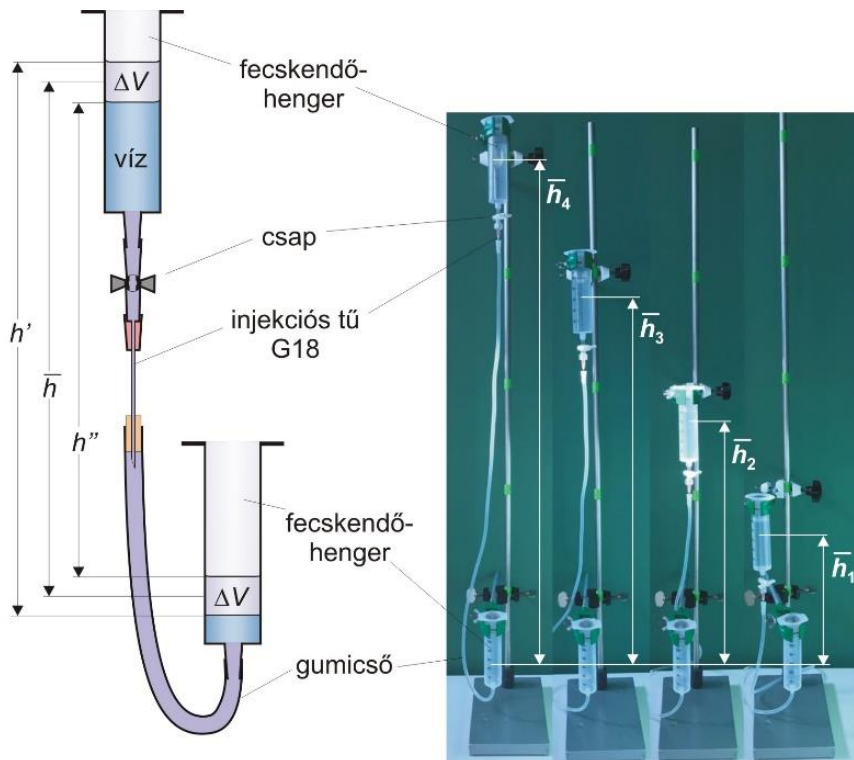
### Feladatok

- A Hagen-Poiseuille törvény igazolására használt modellen mért átfolyási idők és térfogatok ismeretében számítsuk ki az egyes csövekre vonatkozó térfogati áramerősséget!
- Ábrázoljuk a számolt térfogati áramerősség értékeket a mérőcső sugarának függvényében! Ezután illesztéssel határozzuk meg a térfogati áramerősség és a cső sugara közötti függvénykapcsolatot!
- A 1 mm sugarú cső adataiból számítsuk ki a víz viszkozitását a Hagen-Poiseuille törvény felhasználásával!

### 3. Hallgatói kísérlet:

#### A HAGEN-POISEUILLE-TÖRVÉNY IGAZOLÁSA, A TÉRFOGATI ÁRAMERŐSSÉG FÜGGÉSE A NYOMÁSKÜLÖNBSÉGTŐL

A 10. ábrán látható **infúzió modell** segítségével határozzuk meg a térfogati áramerősség ( $I_V$ ) és az áramlást fenntartó hidrosztatikai nyomáskülönbség ( $\Delta p_{\text{átl}}$ ) közötti összefüggést. A csappal ellátott felső fecskendőhengerből a víz egy injekciós tűn (G18) és egy gumicsővön keresztül a felfogótartályként funkcionáló alsó fecskendőhengerbe folyik. Mivel a gumicső, a csap és a csöcsatlakozások belső átmérője jóval nagyobb, mint az injekciós tűé, azok áramlási ellenállása elhanyagolható lesz az injekcióstűéhez képest. A mérés során az adott térfogat ( $\Delta V$ , amely a fecskendőről közvetlenül leolvasható) átfolyási idejét ( $\Delta t$ ) mérjük stopperórával, eltérő átlagos magasságkülönbségek ( $\bar{h}$ ) esetén!



10. ábra. Az infúzió modell vázlatja és fényképe.

### Feladatok

1. Négy eltérő magasságkülönbség esetén mérje meg  $\Delta V = 20$  ml térfogat átfolyásához szükséges időt! Az eredményeket rögzítse a jegyzőkönyvben.
2. Számolja ki a négy magassághoz tartozó átlagos hidrosztatikai nyomáskülönbséget és a térfogati áramerősséget!
3. Ábrázolja a kapott térfogati áramerősségeket a hozzájuk tartozó átlagos nyomáskülönbségek függvényében!
4. Határozza meg a függvénykapcsolatot és számítsa ki a modell áramlási ellenállását!