

Grundlagen der medizinischen Biophysik

4. Vorlesung 17. 09. 2021 Ádám Orosz Mechanik– Arbeit und Energie

1. **Arbeit und Energie**
 - Arbeitssatz
 - Beschleunigungsarbeit und Bewegungsenergie
 - Hubarbeit und Lageenergie
 - Spannarbeit und Spannenergie
 - Energiearten
2. **Leistung**
3. **Energieerhaltung**
4. **Masse-Energie-Äquivalenz**

1

Arbeit und Energie



- Die Aufgabe des Wettbewerbers ist es, mit dem Feuerwehrauto zu wechselwirken und seinen Bewegungszustand zu ändern.
- **Wie stark** der Mann ziehen muss, wird durch die **Kraft F** angegeben.
- Diese **Kraft** bleibt aber **gleich**, egal ob das Feuerwehrauto z. B. 2 m oder 20 m gezogen wird.
- Der Mann hingegen wird unterschiedlich müde.
- Die **Kraft reicht also nicht aus** diese **Wechselwirkung** zwischen Mann und Feuerwehrauto völlig **beschreiben zu können**. Man braucht eine **neue Größe**, die **auch den Weg berücksichtigt** → „**Arbeit**“.

2

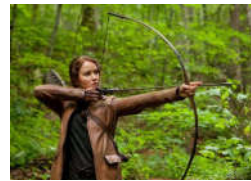
Arbeit und Energie



- Der Mann verrichtet eine Arbeit an dem LKW.
- Dabei wird Energie vom Mann auf den LKW übertragen.
- Der Mann verliert Energie, der LKW gewinnt an Energie.



- Der Mann verrichtet beim Heben eine Arbeit an dem Gewicht.
- Dabei wird Energie vom Mann auf das Gewicht übertragen.
- Der Mann verliert Energie, das Gewicht gewinnt an Energie.



- Die Frau verrichtet beim Spannen der Sehne eine Arbeit an dem Bogen.
- Dabei wird Energie von der Frau auf den Bogen übertragen.
- Die Frau verliert Energie, der Bogen gewinnt an Energie.
- Diese Energie wird in dem Bogen gespeichert.

Arbeit \equiv „Energieübertragung“ – „Energieänderung“

Energie \equiv „gespeicherte Arbeit“ – „Fähigkeit Arbeit zu verrichten“

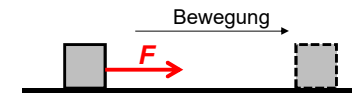
Die **Arbeit** beschreibt einen **Prozess**, die **Energie** hingegen einen **Zustand**.

Energie kann weder erzeugt, noch vernichtet werden. Sie kann nur von einem System auf ein anderes **übertragen** werden bzw. von einer Energieform in eine andere **umgewandelt** werden.

3

Arbeit

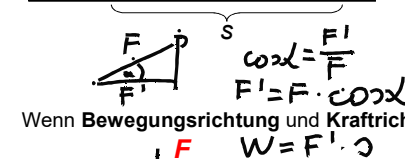
Wenn **Bewegungsrichtung** und **Kraftrichtung** **übereinstimmen**:



Arbeit (W): $W = F \cdot s$ (Nm = J)

Skalar

Joule
(auch die
Maßeinheit
der Energie)



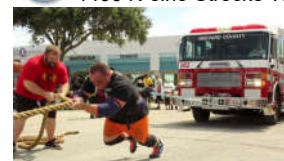
Wenn **Bewegungsrichtung** und **Kraftrichtung** einen **Winkel α** einschließen:

Arbeit (W): $W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$

Skalar



Berechnen Sie die Arbeit des Mannes, wenn er den LKW mit einer **horizontalen** Kraft von 1400 N eine Strecke von 30 m zieht.



$$W = 1400 \cdot 30 = 42000 \text{ J} = 42 \text{ kJ}$$

$$\text{Mit } 5359 \text{ cal} = 535000 \text{ cal} \xrightarrow{\times 4.19} 2241650$$

$$\frac{42000}{2241650} = 0,019 \quad \approx 2\%$$

4

Arbeitssatz

Wenn die Kraft konstant ist (und $a = 0$): $W = m \cdot a \cdot \Delta x$
 $F = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \cdot m$

Die Verschiebung wäre $\Delta x = v \Delta t$, aber v ändert sich auch:

$$\Delta x = \frac{(v_1 + v_2)(t_2 - t_1)}{2}$$

$$W = m \cdot \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \cdot \frac{(v_1 + v_2)(t_2 - t_1)}{2} = m \cdot \frac{(v_2 - v_1)(v_1 + v_2)}{2}$$

$$W = m \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = E_{kin,2} - E_{kin,1} = \Delta E_{kin}$$

$\sum F \cdot \Delta x = \sum W$

Bewegungsenergie (E_{kin})

Das Ergebnis der Arbeit ist eine größere E_{kin}

$$\sum_{i=1}^n W = \Delta E_{kin}$$

5

Beschleunigungsarbeit und Bewegungsenergie (kinetische Energie)

Die bei der Beschleunigung eines Körpers von der Geschwindigkeit von 0 auf v zu verrichtende Arbeit wird als Beschleunigungsarbeit bezeichnet:

$v_0 = 0$ v

$W = F \cdot s = \frac{1}{2} m v^2$



Die gespeicherte Bewegungsenergie kann dann für andere Zwecke verwendet werden:



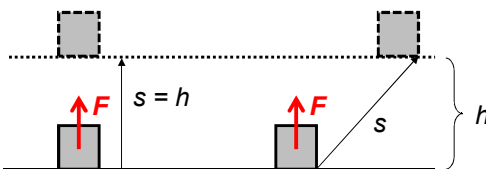
6

Die verrichtete Arbeit erscheint dann als **Bewegungsenergie** oder **kinetische Energie**:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

Hubarbeit und Lageenergie (potenzielle Energie)

Die beim Anheben eines Körpers um die Höhe h zu verrichtende Arbeit wird als Hubarbeit bezeichnet:



$$W = F \cdot s = mgh$$

Die verrichtete Arbeit erscheint dann als **Lageenergie** oder **potenzielle Energie**:

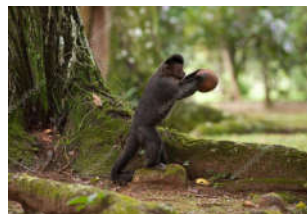
Im Gravitationsfeld:

$$\Delta E_{pot} = mg \Delta h$$

- Das Nullniveau der Lageenergie kann *willkürlich* festgelegt werden.



Die gespeicherte Lageenergie kann dann für nützliche Zwecke verwendet werden:



7

Spannarbeit und Spannenergie (elastische Energie)

Die bei der Verlängerung einer Feder (oder Spannung eines Bogens) um s zu verrichtende Arbeit wird als Spannarbeit bezeichnet:

$s = 0$

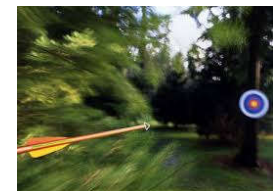
$W = \frac{D \cdot s \cdot s}{2} = \frac{1}{2} D s^2$

$W = F \cdot s = \frac{1}{2} D s^2$

$F = D \cdot s$



Die gespeicherte elastische Energie kann dann für nützliche Zwecke verwendet werden:



Die verrichtete Arbeit erscheint dann als **Spannenergie** oder **elastische potenzielle Energie**:

$$W = \Delta E_{pot} \quad E_{el} = \frac{1}{2} D s^2$$



Wie viele Energie steckt in der Achilles-Sehne bei einer Verlängerung von 2 mm, wenn die Federkonstante $1,2 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ ist:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 10^5 \cdot 0,002^2 = 0,24 \text{ J}$$

8

Energiearten

Wir können vielen Arten der Energie begegnen:

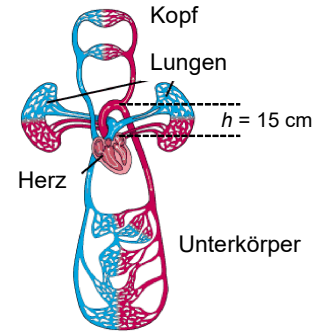
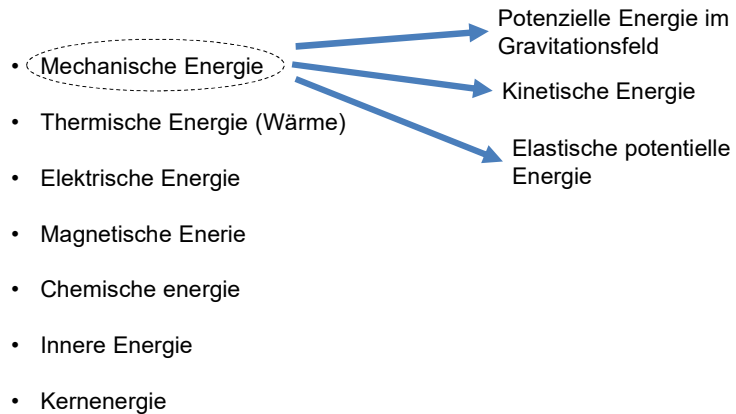
Grundbegriffe in der Mechanik:

Potenzielle Energie

- mit der Position verbunden

Kinetische Energie

- mit der Bewegung verbunden



Übung

Das Blut wird durch die Herzkontraktion auf eine Geschwindigkeit von 40 cm/s beschleunigt und um 15 cm gehoben. Der linke Ventrikel pumpt in einer Kontraktion eine Blutmenge von 60 g aus. Berechnen Sie

a) die Beschleunigungsarbeit

$$v = 40 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m = 60 \text{ g} = 0,06 \text{ kg}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 0,06 \cdot 0,4^2 = 0,0048 \text{ J}$$

b) die Hubarbeit

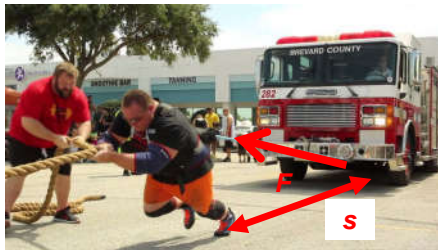
$$h = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$$

$$W = m \cdot g \cdot h = 0,06 \cdot 9,81 \cdot 0,15 = 0,0883 \text{ J}$$

c) die Gesamtarbeit des Herzens in einer Kontraktion

$$W_G = 0,0048 + 0,0883 = 0,0931 \text{ J}$$

Leistung



- Wie **stark** der Mann ziehen muss, wird durch die **Kraft F** bzw. wie viel Arbeit er bei einer **Strecke** von **s** verrichtet, wird durch die **Arbeit W** angegeben.
- Kraft und Arbeit bleiben gleich, egal ob die Strecke z. B. in 2 Minuten oder in 20 Minuten zurückgelegt wird.
- Man braucht **eine neue Größe**, die **auch die Zeit** berücksichtigt → „**Leistung**“.

Leistung

Leistung (P): $P = \frac{W}{t} \left(\frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W} \right)$

Die „Arbeitsgeschwindigkeit“

Watt

Fortsetzung der früheren Aufgabe: Berechnen Sie die Leistung des Herzens, wenn eine Kontraktion 0,2 s lang dauert.

$$P = \frac{0,0931 \text{ J}}{0,2} = 0,466 \text{ W}$$

Fortsetzung der früheren Aufgabe: Berechnen Sie die Leistung des Mr. Strongmans, wenn er beim Ziehen des LKWs die 30 m Strecke in 41 s zurücklegt.

$$W = 1400 \cdot 30 = 42000 \text{ J}$$

$$P = \frac{42000}{41} = 1024 \text{ W}$$

Energieerhaltung

Energieerhaltungssatz (im Allgemeinen):

Energie kann weder erzeugt, noch vernichtet werden. Sie kann nur von einem System auf ein anderes übertragen werden bzw. von einer Energieform in eine andere umgewandelt werden.



Wenn die Reibung vernachlässigbar ist (und andere elektrische, magnetische Erscheinungen nicht berücksichtigt werden), dann gilt der **Energieerhaltungssatz für die mechanischen Energieformen:**

$$\sum E_i = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} + E_{\text{el}} = \text{konstant}$$

Das heißt:

Zum Zeitpunkt 1:	$E_{\text{pot},1}$	Zum Zeitpunkt 2:	$E_{\text{pot},2}$
	$E_{\text{kin},1}$		$E_{\text{kin},2}$
	$E_{\text{el},1}$		$E_{\text{el},2}$

$$E_{\text{pot},1} + E_{\text{kin},1} + E_{\text{el},1} = E_{\text{pot},2} + E_{\text{kin},2} + E_{\text{el},2}$$

13

Masse-Energie-Äquivalenz

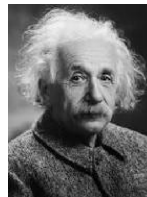
Nach der Relativitätstheorie sind Masse und Energie gleichwertig und über folgende Gleichung miteinander verknüpft:

$$E = m \cdot c^2$$

Zur Masse gehörende Energie

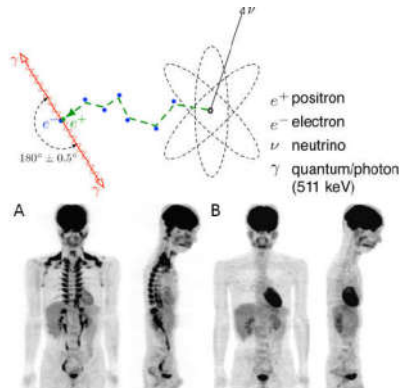
Masse eines Teilchens

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum: $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$



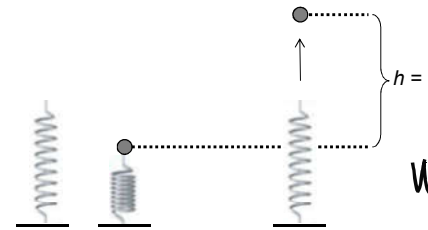
Der Zusammenhang ist bei solchen Erscheinungen verwendbar, wo Teilchen verschwinden und sich ihre Massen in Energie umwandeln, oder wo aus Energie neue Teilchen entstehen, z. B. bei der **Paarbildung** oder **Paarvernichtung** in der PET Untersuchung:

- Bei der Positronen-Emissions-Tomographie werden dem Körper Beta-Plus-Strahler appliziert
- Diese zerfallen, wobei u.a. ein Positron entsteht
- Dieses Positron vereinigt sich nach kurzer Zeit mit einem Elektron und die beiden werden vollständig in Energie umgewandelt (Annihilation = Paarvernichtung), wobei 2 Gamma-Photonen entstehen, die dann detektiert werden
- Jedes dieser Gamma-Photonen besitzt eine Energie von 510 keV



15

Übung



Wie stark muss eine Schraubenfeder mit der Federkonstante von 2000 N/m gestaucht werden, damit die Kugel mit der Masse von 30 g bis zur einer Höhe von 10 m fliegt?

$$m = 30 \text{ g} = 0,03 \text{ kg}$$

$$W = 0,03 \cdot 9,81 \cdot 10 = 2,943 \text{ J}$$

$$2,943 \text{ J} = W_{\text{el}} = \frac{1}{2} D \cdot s^2 = \frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot s^2$$

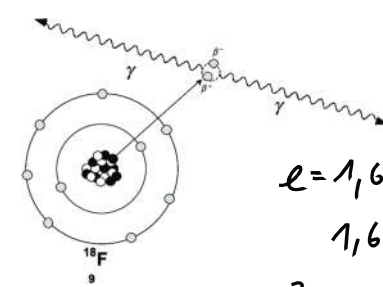
$$s = ? \quad s = 0,054 \text{ m}$$

$$F = D \cdot x = 2000 \cdot 0,054 = \underline{\underline{108,5 \text{ N}}}$$

14

Übung

Warum ist bei der Paarvernichtung die Energie der γ -Photonen gerade 511 keV?



$$\Delta u = \frac{W}{Q} \quad V = \frac{q}{C}$$

$$V \cdot C = q$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$E = m_e c^2 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 8,199 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

$$\frac{8,199 \cdot 10^{-14}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 512438 \text{ eV} = \underline{\underline{512 \text{ keV}}}$$

16



Hausaufgaben: Grundschrift Kapitel 5