



Kleine medizinische Signalverarbeitung



KAD 2021.11.09

Signal: eine Grösse, die Information trägt, weiterleitet oder speichert

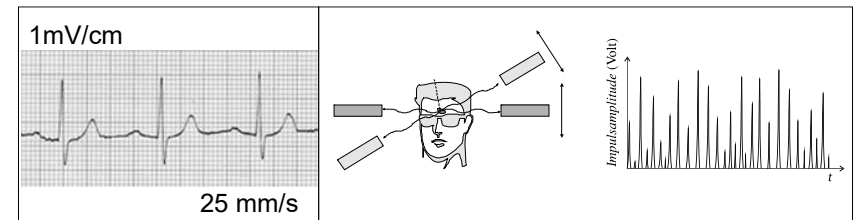
Beispiel1:

elektrische Spannung, die infolge der Herz-/Gehirn-tätigkeit auf der Körper-/Schädeloberfläche erscheint (EKG/EEG)

Beispiel2:

die detektierte Gamma-Quanten bei der Isotopendiagnostik

(1)

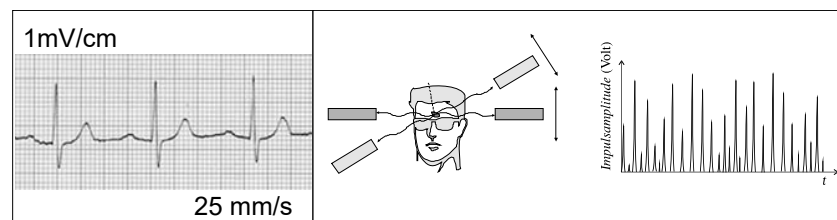


(2)

2

Klassifizierung der Signale

- | | | |
|------------------------|---|------------------------|
| statisches S. | – | zeitabhängiges S. |
| (quasi)periodisches S. | – | nichtperiodisches S. |
| stochastisches S. | – | nichtstochastisches S. |
| | | (deterministisches S.) |
| nichtelektrisches S. | – | elektrisches S. |
| analoges S. | – | digitales S. |



3

in ausgezeichnete Rolle

elektrische Signale

die nichtelektrische Signale werden in elektrische Signale umgewandelt

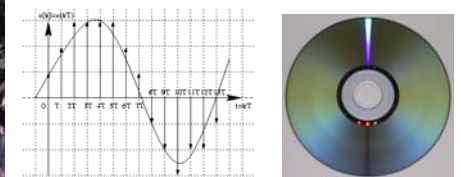
Vorteil der elektrischen Signale:
Umwandlung, Verstärkung,
Weiterleitung ist einfach



digitale Signale

die analoge Signale werden digitalisiert

Vorteil der digitalen Signale:
Speicherung ist einfach,
Rausch kann
minimalisiert werden



4

Grösse (und Einheit), die für die Vergleichung der Masse der Signale verwendet wird:

Bel-Zahl: n

(nach A. Bell)

Einheit von n : Bel (B)

$$n = \lg \frac{P_2}{P_1} \text{ B} = \lg \frac{J_2}{J_1} \text{ B} = \lg \frac{E_2}{E_1} \text{ B}$$

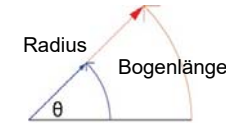
Zehnerlogarithmus des Quotienten von zwei Leistungen (oder Intensitäten, oder Energien)

5

Vgl. **Bogenmass**

$$\Theta = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$$

$$[\Theta] = \frac{\text{m}}{\text{m}} = \text{rad} = 1$$



Vgl. **pH** (power of Hydrogen)

$$\text{pH} = -\lg \frac{[\text{H}^+]}{1\text{M}}$$

$$\text{z.B.: } [\text{H}^+] = 10^{-7} \text{ M}$$

$$\Rightarrow \text{pH} = -\lg 10^{-7} = -1 \cdot (-7) = 7$$

Anstatt der Bel-Zahl die angewandte Grösse:

Dezibel-Zahl oder Pegel

$$n = 10 \cdot \lg \frac{P_2}{P_1} \text{ dB} \quad (10\text{d} = 1)$$

6

charakteristische Grösse: **Leistung** (o. Intensität/ Energie),
technische Grösse: (elektrische) **Spannung**

Zusammenhang zwischen der Leistung und der Spannung:

$$P = U \cdot I = U^2 / R \quad (\text{Ohm: } U = R \cdot I)$$

Dezibel Zahl mit Spannungsverhältnis:

$$n = 10 \cdot \lg \frac{P_2}{P_1} \text{ dB} = 10 \cdot \lg \frac{U_2^2 / R_2}{U_1^2 / R_1} \text{ dB} =$$

$R_2 \approx R_1$
 \downarrow

$$= 10 \cdot \lg \frac{U_2^2}{U_1^2} \text{ dB} = 20 \cdot \lg \frac{U_2}{U_1} \text{ dB}$$

7

$$\frac{P_2}{P_1} = 2 \Leftrightarrow 10 \lg 2 \text{ dB} =$$

$$= 10 \cdot 0,3 \text{ dB} = 3 \text{ dB}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -3 \text{ dB}$$

vgl. Halbwerts-Zeit/Dicke

$$\frac{P_2}{P_1} = 10 \Leftrightarrow 10 \lg 10 \text{ dB} =$$

$$= 10 \cdot 1 \text{ dB} = 10 \text{ dB}$$

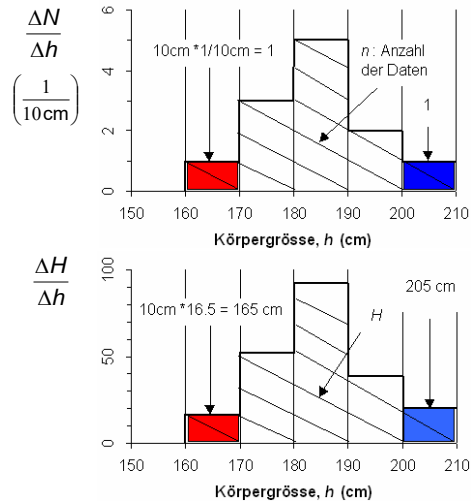
$$\frac{P_2}{P_1} = 100 \Leftrightarrow 10 \lg 100 \text{ dB} =$$

$$= 10 \cdot 2 \text{ dB} = 20 \text{ dB}$$

| U_2/U_1 | P_2/P_1 | dB |
|-------------|--------------|----|
| 1,414 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 6 |
| | 8 | 9 |
| 3,16 | 10 | 10 |
| | 20 | 13 |
| 10 | 100 | 20 |
| | $1000=10^3$ | 30 |
| $100=10^2$ | $10000=10^4$ | 40 |
| $1000=10^3$ | 10^6 | 60 |

8

Häufigkeitsverteilung



h : Körperhöhe

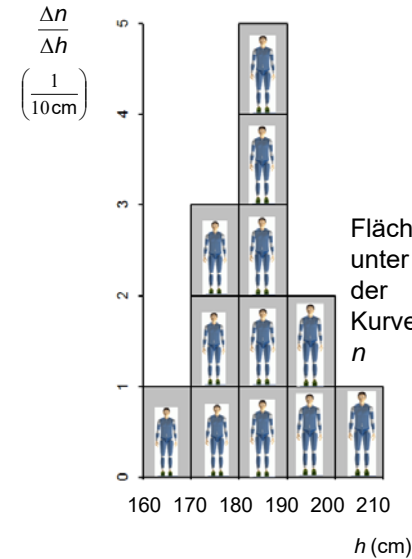
H : kollektive Höhe, Gesamthöhe



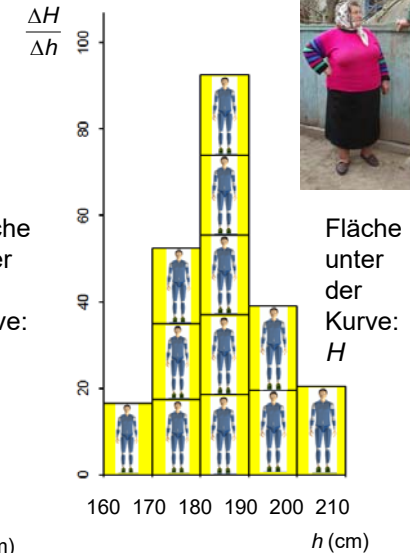
Spektrum als eine spezielle Häufigkeitsverteilung

9

Häufigkeitsdichte



Spektrum

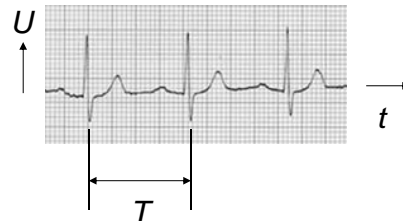


10

Fourier-Theorem für periodische Funktionen (Signale)

Jede periodische Funktion kann durch die Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen (Grundfrequenz + Obertöne) hergestellt werden.

periodische Funktion: es gibt eine Periode(nzeit), T



$1/T=f$, wo f ist die Frequenz

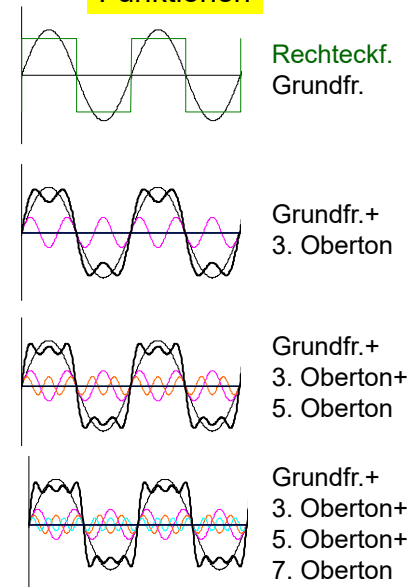
f ist die Frequenz der Sinusfunktion: **Grundfrequenz** (Grundschiwingung)

$2f, 3f, 4f, \dots$: **Obertöne** (Oberschwingungen)

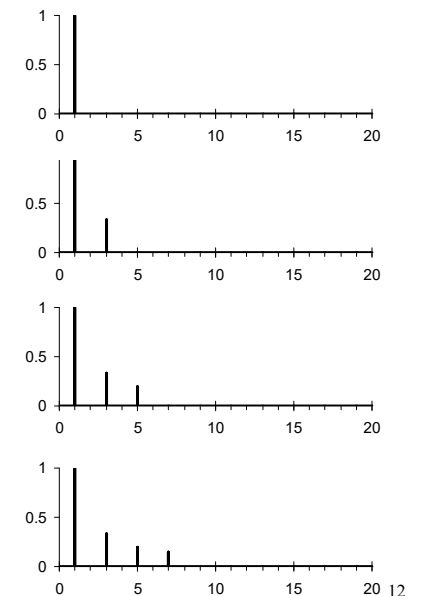
(Linienpektrum)

11

Funktionen

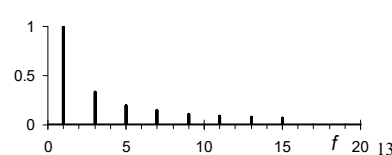
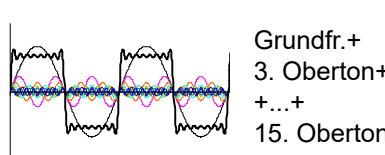
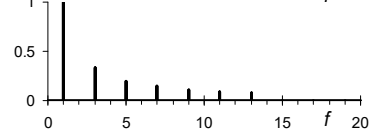
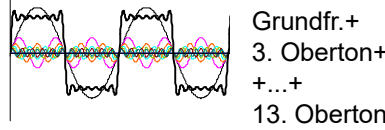
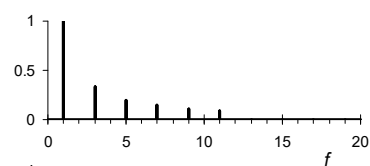
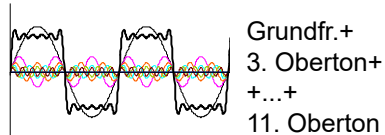
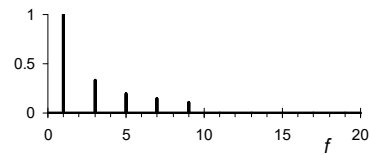
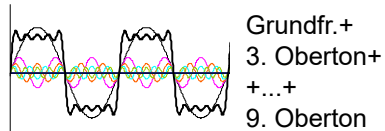


Spektrum

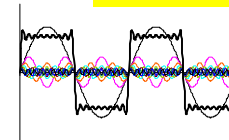


12

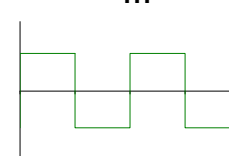
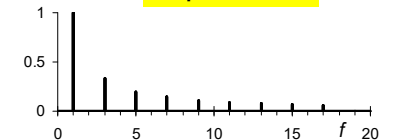
Funktionen



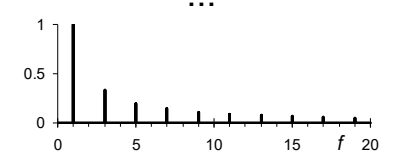
Funktionen



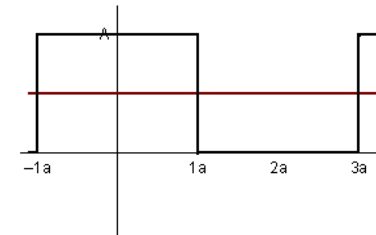
Grundfr.+
3. Oberton+
...+
17. Oberton



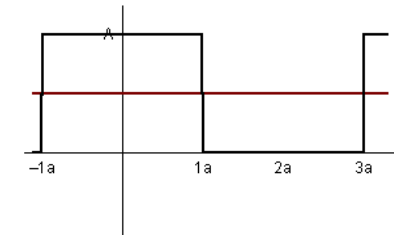
Grundfr.+
3. Oberton+
...+
17. Oberton+
...



Einzelne Summanden bis zur Ordnung 0

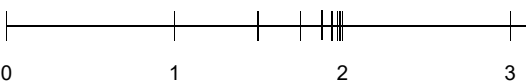


Überlagerung



Vgl. Funktionsreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$



$$\sum_{k=0}^{31} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{31}} = 2, \text{ Fehler: } 4,6 \cdot 10^{-10}$$

genau genug(?)

$$\sum_{k=0}^{49} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{49}} = 2, \text{ Fehler: } 3,55 \cdot 10^{-15}$$

genau genug

| i | 1/2 ^k | Σ(1/2 ^k) | ε=2-Σ(1/2 ^k) |
|----|------------------|----------------------------|--------------------------|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0,5 | 1,5 | 0,5 |
| 2 | 0,25 | 1,75 | 0,25 |
| 3 | 0,125 | 1,875 | 0,125 |
| 4 | 0,0625 | 1,9375 | 0,0625 |
| 5 | 0,03125 | 1,96875 | 0,03125 |
| 6 | 0,015625 | 1,984375 | 0,015625 |
| 7 | 0,007813 | 1,9921875 | 0,0078125 |
| 8 | 0,003906 | 1,99609375 | 0,00390625 |
| 9 | 0,001953 | 1,998046875 | 0,001953125 |
| 10 | 0,000977 | 1,9990234375 | 0,0009765625 |
| 11 | 0,000488 | 1,99951171875 | 0,00048828125 |
| 12 | 0,000244 | 1,9997578125 | 0,000244140625 |
| 13 | 0,000122 | 1,99987890625 | 0,0001220703125 |
| 14 | 6,1E-05 | 1,999939453125 | 6,1E-05 |
| 15 | 3,05E-05 | 1,9999697265625 | 3,05E-05 |
| 16 | 1,52E-05 | 1,99998486328125 | 1,52E-05 |
| 17 | 7,6E-06 | 1,999992431640625 | 7,6E-06 |
| 18 | 3,8E-06 | 1,9999962158203125 | 3,8E-06 |
| 19 | 1,9E-06 | 1,99999810791015625 | 1,9E-06 |
| 20 | 9,5E-07 | 1,999999053955078125 | 9,5E-07 |
| 21 | 4,75E-07 | 1,9999995269775390625 | 4,75E-07 |
| 22 | 2,37E-07 | 1,99999976348876953125 | 2,37E-07 |
| 23 | 1,19E-07 | 1,999999881744384765625 | 1,19E-07 |
| 24 | 5,95E-08 | 1,99999994087218953125 | 5,95E-08 |
| 25 | 2,97E-08 | 1,99999997043609375 | 2,97E-08 |
| 26 | 1,49E-08 | 1,999999985218046875 | 1,49012E-08 |
| 27 | 7,45E-09 | 1,9999999926090234375 | 7,45058E-09 |
| 28 | 3,73E-09 | 1,99999999630451171875 | 3,72529E-09 |
| 29 | 1,86E-09 | 1,9999999981522578125 | 1,86265E-09 |
| 30 | 9,31E-10 | 1,99999999907612890625 | 9,31323E-10 |
| 31 | 4,66E-10 | 1,999999999538064453125 | 4,65661E-10 |
| 32 | 2,33E-10 | 1,9999999997690321875 | 2,32831E-10 |
| 33 | 1,16E-10 | 1,99999999988451609375 | 1,16416E-10 |
| 34 | 5,8E-11 | 1,999999999942258046875 | 5,8208E-11 |
| 35 | 2,9E-11 | 1,9999999999711290234375 | 2,9104E-11 |
| 36 | 1,45E-11 | 1,99999999998556451171875 | 1,4552E-11 |
| 37 | 7,25E-12 | 1,999999999992782265625 | 7,276E-12 |
| 38 | 3,62E-12 | 1,9999999999963911328125 | 3,638E-12 |
| 39 | 1,81E-12 | 1,999999999998195564453125 | 1,819E-12 |
| 40 | 9,05E-13 | 1,99999999999909778125 | 9,095E-13 |
| 41 | 4,52E-13 | 1,99999999999954890625 | 4,547E-13 |
| 42 | 2,26E-13 | 1,999999999999774453125 | 2,273E-13 |
| 43 | 1,13E-13 | 1,9999999999998872265625 | 1,136E-13 |
| 44 | 5,65E-14 | 1,999999999999943609375 | 5,672E-14 |
| 45 | 2,82E-14 | 1,9999999999999718046875 | 2,836E-14 |
| 46 | 1,41E-14 | 1,99999999999998590234375 | 1,418E-14 |
| 47 | 7,11E-15 | 1,999999999999992951171875 | 7,10543E-15 |
| 48 | 3,55E-15 | 1,9999999999999964765625 | 3,55271E-15 |
| 49 | 1,78E-15 | 1,99999999999999823828125 | 0 |
| 50 | 8,88E-16 | 1,999999999999999119140625 | 0 |

Erzeugung
eines EKG-
Signals aus der
Summe von
Sinussignalen



Ursprüngliches Signal und
aus den ersten 3
Fourierkomponenten
zusammengesetztes Signal



Ursprüngliches Signal und
aus den ersten 10
Fourierkomponenten
zusammengesetztes Signal

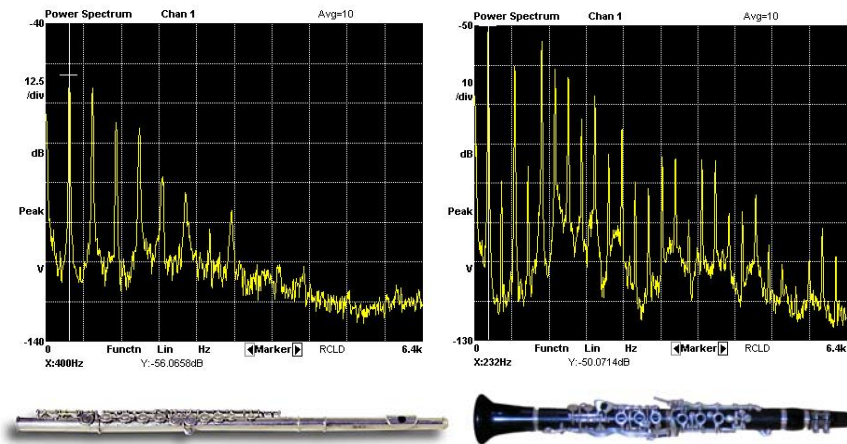


Ursprüngliches Signal und
aus den ersten 64
Fourierkomponenten
zusammengesetztes Signal

Warum nennen wir die Grund- und Oberfrequenzen als Grundton und Obertönen?

Flöte

Klarinette



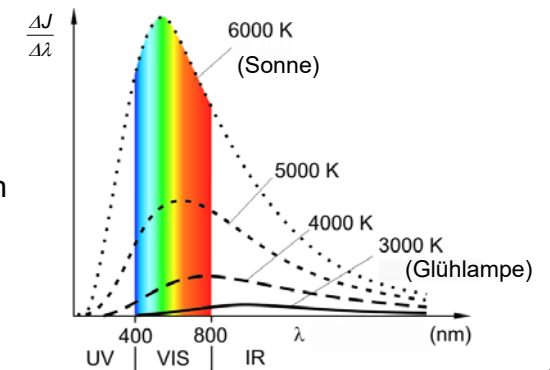
17

Fourier-Theorem für aperiodische Funktionen (Signale)

Jede Funktion kann durch eine Summe von Sinus- (harmonischen) Funktionen hergestellt werden.

Das Spektrum: kontinuierliches Spektrum.

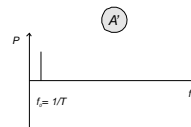
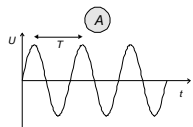
vgl.
Emissionsspektren



18

Funktionen

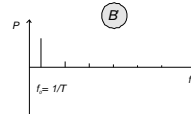
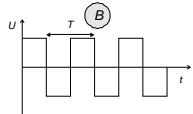
Sinus-Funktion



Spektrum

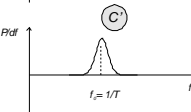
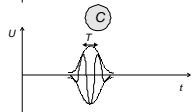
Linienspektrum (1 Linie)

periodische Funktion



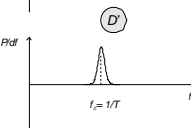
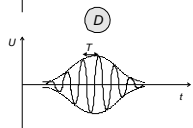
Linienspektrum

ein Paar Periode



Bandenspektrum

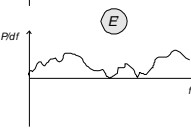
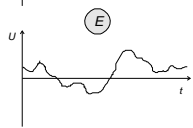
ein Paar Periode



Anwendung: Puls-Ultraschall

Bandenspektrum

aperiodische Funktion



kontinuier. Spektrum

19

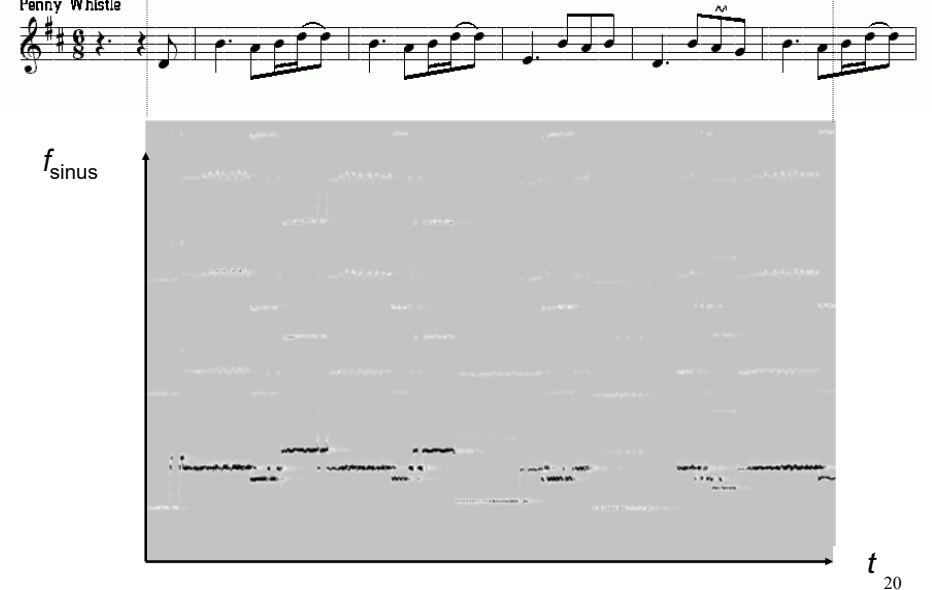
Inisheer

Penny Whistle

Musik in Zeit-Frequenz Darstellung

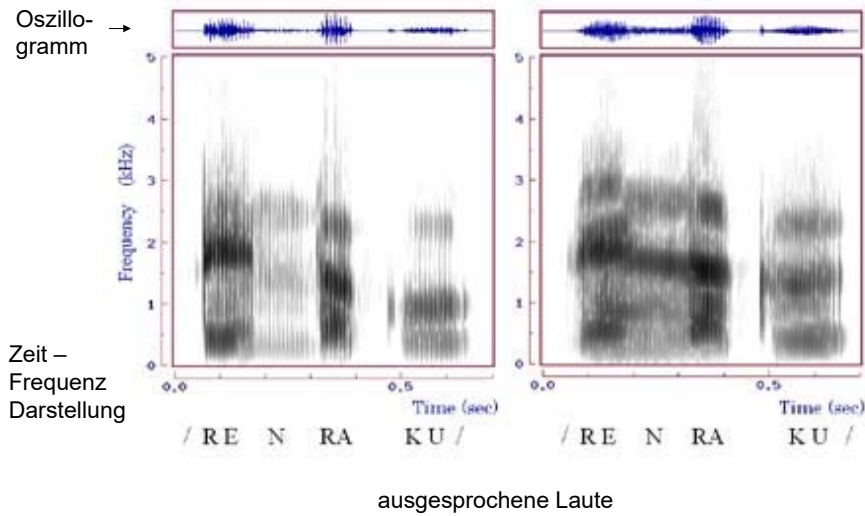
Traditional

Air



20

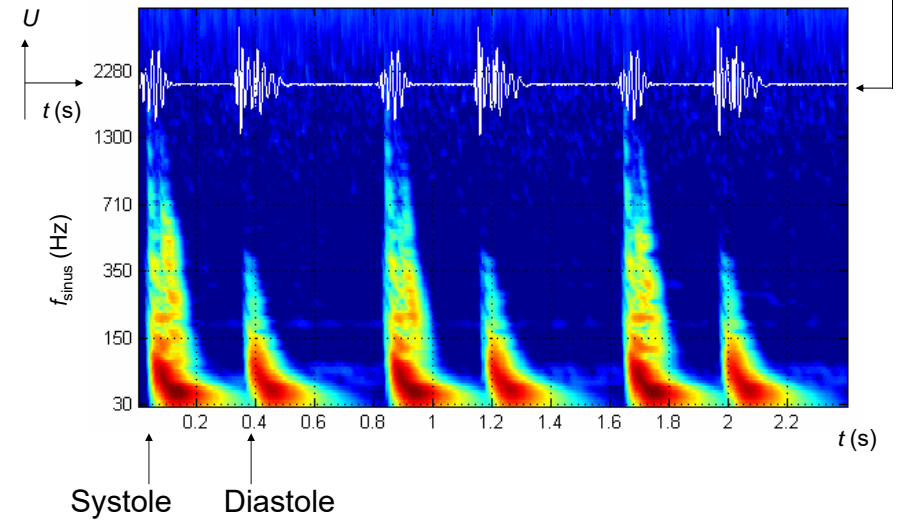
Sonogramm = Schall-Spektrogramm (voiceprint)



<http://www.nrips.go.jp/org/fourth/info3/index-e.html>

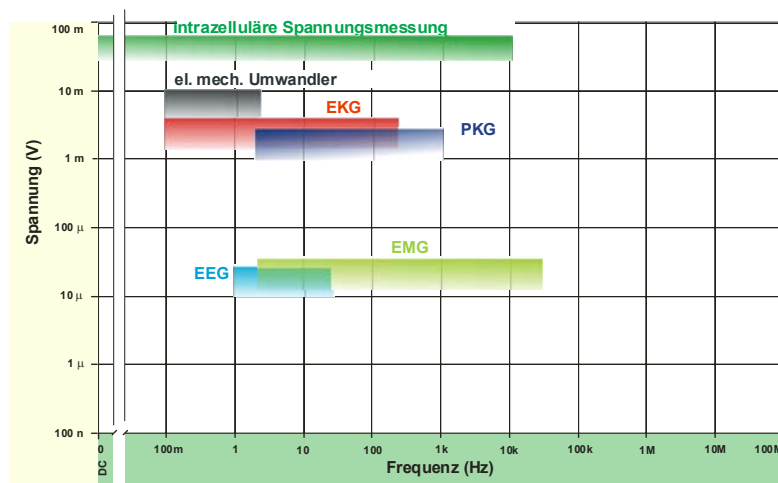
21

Herztöne in Zeit-Frequenz Darstellung (+ Oszillogramm)



22

Einige charakteristischen Daten bioelektrischer Potentiale



23

Eine frequenzabhängige Einheit: (elektrischer) Verstärker

- (1) $P_{\text{ein}} < P_{\text{aus}}$
- (2) P_{ein} und P_{aus} : gleiche Funktionen

gleich: „fundamentale“ Anforderung
ähnlich: reelle Anforderung

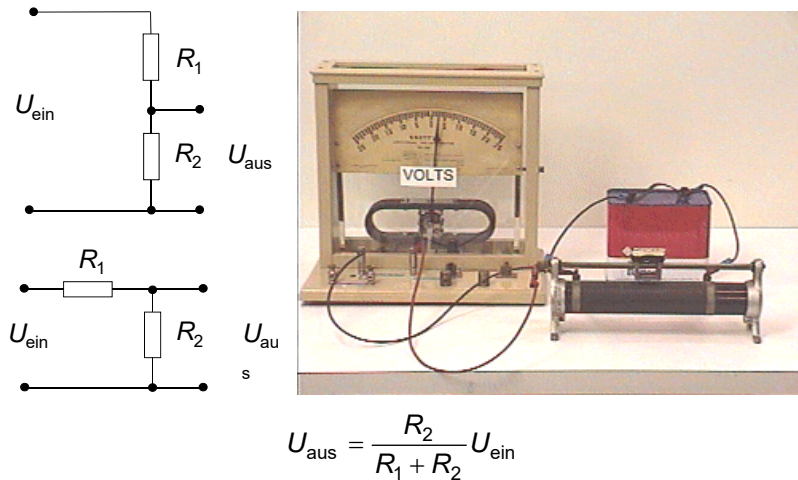
$$(1) + (2) \quad V_P \cdot P_{\text{ein}}(t) \equiv P_{\text{aus}}(t), \text{ wo } V_P > 1$$

$$V_P = \frac{P_{\text{aus}}}{P_{\text{ein}}}, \text{ Leistungsverstärkung (sfaktor)}$$

$$V_U = \frac{U_{\text{aus}}}{U_{\text{ein}}}, \text{ Spannungsverstärkung (sfaktor)}$$

24

Frequenzunabhängiger Spannungsteiler

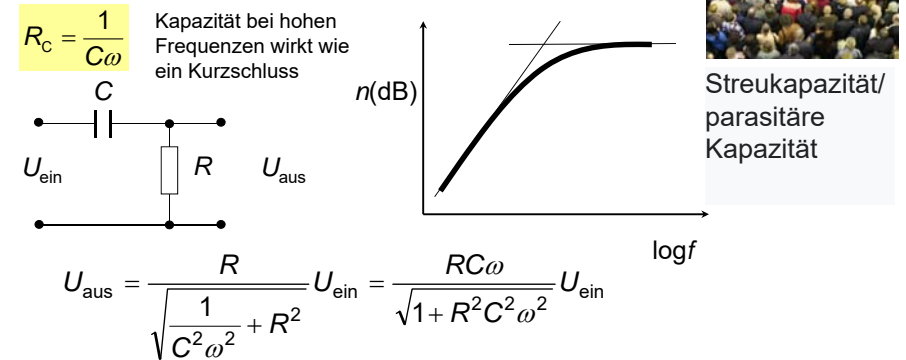


Frequenzabhängige Spannungsteilung mit Kondensator

25

Ergänzungsmaterial

Hochpass Filter (high-pass filter)



bei sehr kleinen Frequenzen: wenn $\omega \approx 0$, $U_{\text{aus}} = 0$

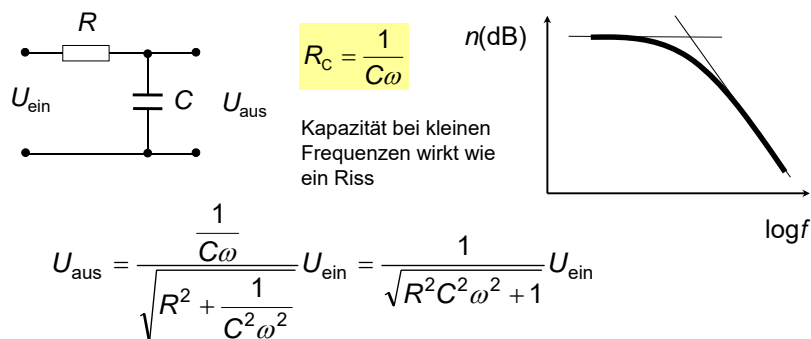
bei kleinen Frequenzen: wenn $\omega \ll \omega_0$, $U_{\text{aus}} = RC\omega U_{\text{ein}}$

bei hohen Frequenzen: wenn $\omega \gg \omega_0$ ($\omega \approx \infty$), $U_{\text{aus}} = U_{\text{ein}}$

26

Ergänzungsmaterial

Tiefpass Filter (low-pass filter)



bei kleinen Frequenzen: wenn $\omega \ll \omega_0$ ($\omega \approx 0$), $U_{\text{aus}} = U_{\text{ein}}$

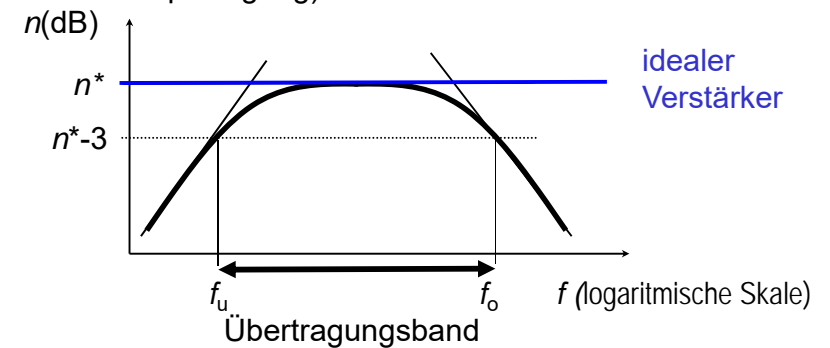
bei grossen Frequenzen: wenn $\omega \gg \omega_0$, $U_{\text{aus}} = \frac{1}{RC\omega} U_{\text{ein}}$

bei sehr grossen Frequenzen: wenn $\omega \approx \infty$, $U_{\text{aus}} = 0$

27

für (1): $V_p > 1$, $n = 10 \lg V_p = 20 \lg V_U(\text{dB}) > 0 \text{ dB}$

für (2): **Frequenzcharakteristik**
(Frequenz-Antwort-Funktion, Übertragungskennlinie, Frequenzgang)

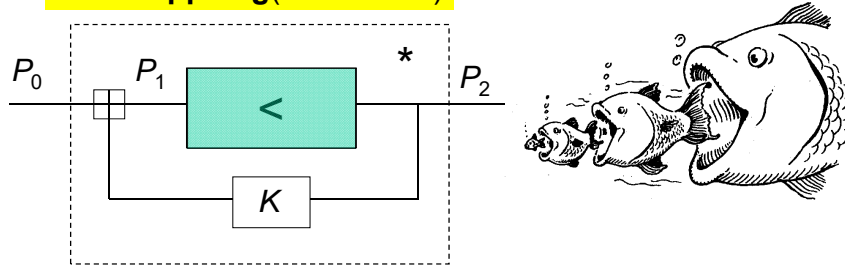


f_u : untere Grenzfrequenz

f_o : obere Grenzfrequenz

28

Rückkopplung(sverstärker)



$$(a) P_1 = P_0 + KP_2 \quad (b) V_P = \frac{P_2}{P_1}$$

$$(c) V_P^* = \frac{P_2}{P_0} = \frac{P_1 V_P}{P_0} = \frac{(P_0 + KP_2) V_P}{P_0} = V_P + K \frac{P_2}{P_0} V_P = V_P + KV_P^* V_P$$

$$V_P^* - KV_P^* V_P = V_P \quad \boxed{V_P^* = \frac{V_P}{1 - KV_P}}$$

29

$$V_P^* = \frac{V_P}{1 - KV_P}, \quad V_P^* : \text{Verstärkungsfaktor des rückgekoppelten Verstärkers}$$

V_P : Verstärkungsfaktor des Verstärkers (ohne R.k.)

$K > 0$, Mitkopplung (positive R.k. - gleiche Phase),

$$V_P^* > V_P \quad (\text{Vorteil})$$

$K < 0$, Gegenkopplung (negative R.k. - entgegengesetzte Phase),

$$V_P^* < V_P \quad (\text{Nachteil})$$

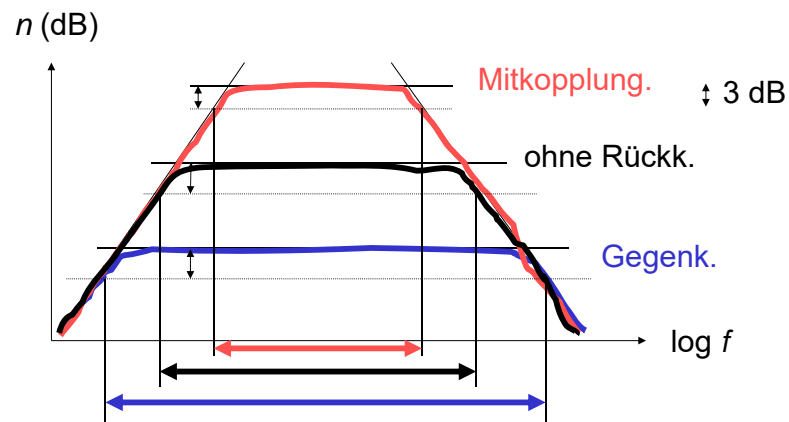
Mitkopplung: Sinusoszillator
($KV_P=1$, Verstärkung: „unendlich“)

Anwendung: Ultraschall(generator)
Wärmetherapie(gen.)

Gegenkopplung: alle Verstärker



30

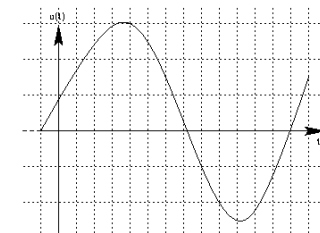


Mitkopplung: Übertragungsband – schmaler (Nachteil)

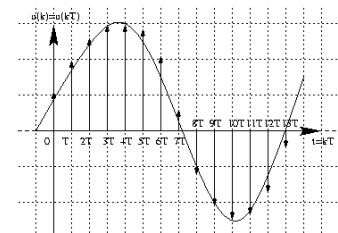
Gegenkopplung: Übertragungsband – breiter (Vorteil)

31

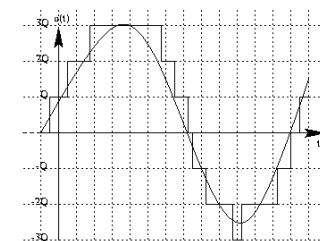
Analoges Signal – digitales Signal



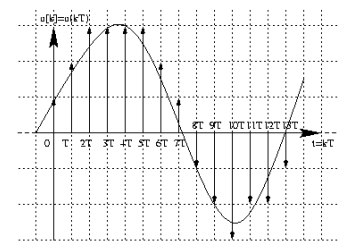
analoges Signal: zeit- und wertekontinuierliches S.



zeitdiskretes, wertekontinuierliches S.



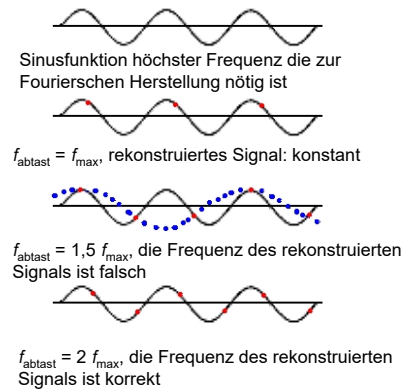
wertdiskretes, zeitkontinuierliches S.



digitales Signal: zeit- und wertdiskretes S.

32

zeitdiskretes Signal: man kennt den Signalwert nicht in allen Zeitpunkten



Nyquist-Shannon Abtasttheorem:

Ein Signal einer Maximalfrequenz f_{max} mit einer Frequenz grösser als $2f_{\text{max}}$ abgetastet werden muss, damit man aus dem so erhaltenen zeitdiskreten Signal das Ursprungssignal ohne Informationsverlust rekonstruieren kann.

z.B.: hifi, $f_{\text{max}} = 20 \text{ kHz}$

$f_{\text{ablast}} = 44.1 \text{ kHz} > 2 \cdot 20 \text{ kHz}$

wertediskretes Signal: der Wert des Signals kann nicht beliebig gross sein

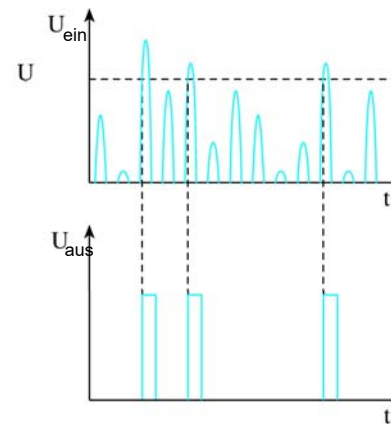
z.B.: hifi, 16 bit = $2^{16} = 65\,536$ (CD Standard)

24 bit = $2^{24} = 16\,777\,216$ ("beste" Tonkarte)

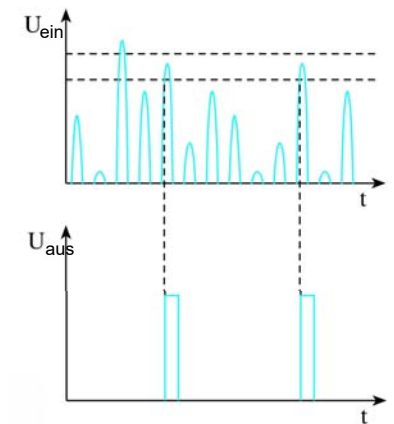
33

Selektieren von Impulssignalen

Integraldiskrimination



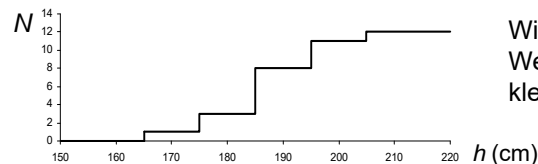
Differentialdiskrimination



34

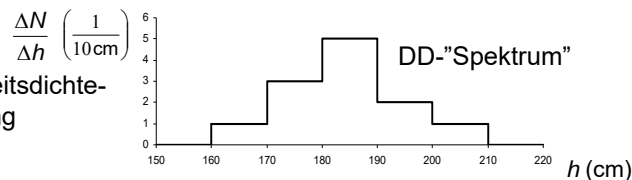
Summen- (kumulierte/kumulative) Häufigkeitsverteilung

Summen-Häufigkeitsverteilung



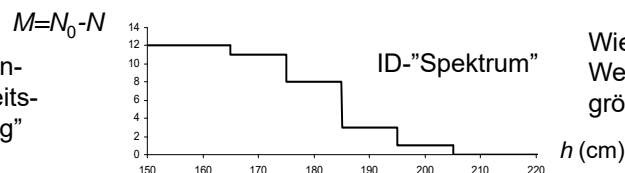
Wieviele Werte sind kleiner als h?

Häufigkeitsdichte-Verteilung



DD-"Spektrum"

"Summen-Häufigkeitsverteilung"



ID-"Spektrum"

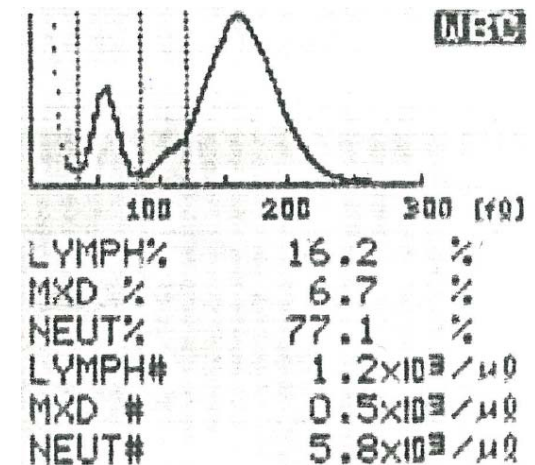
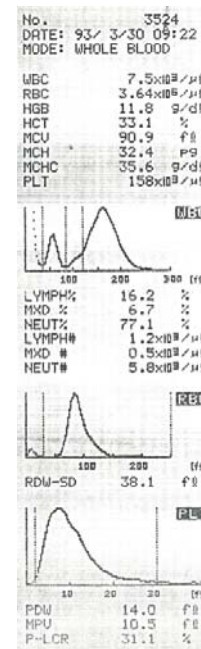
Wieviele Werte sind grösser als h?

35

Coulter-Zähler (S. Praktikum)



Konzentration von Leukozyten



36