Wahrscheinlichkeitsrechnung

$I^A i$? $I^A i$

KAD 2011.09.29

Zufallsexperiment

- Vorgang nach einer bestimmten Vorschrift ausgeführt
- (im Prinzip) beliebig oft wiederholbar
- sein Ergebnis ist zufallsabhängig
- bei mehrmaligen Durchführung des Experiments beeinflussen die Ergebnisse einander nicht

Beispiele:

Würfelspiel

Roulett

$I^A i$? $I^A i$

Blutgruppenversuch

Fahrtversuch

Elementarereignisse

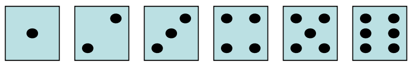
die einzelnen, nicht mehr zerlegbaren und sich gegenseitig ausschliessenden Ausgänge oder Ergebnisse eines Zufallsexperimentes

Ereignismenge, Ereignisraum (Ω)

Reihe aller möglichen Elementarereignisse. Z.B:

beim Würfelspiel:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



beim Münzenexperiment: $\Omega = \{\text{Zahl, Kopf}\}$

beim „Blutgruppenversuch": $\Omega = \{I^A I^A,\ I^A i,\ iI^A,\ ii\}$

beim „Fahrtversuch":

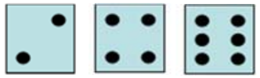
{kein Unfall, Unfall}

Ereignis

jede beliebige Teilmenge des Ergebnisraumes

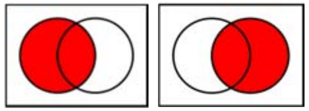
zB. Augenzahl des Würfels >3: {4, 5, 6}

Augenzahl des Würfels ist gerade: {2, 4, 6}



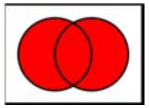
Blutgruppe A: $\{I^A I^A,\ I^A i,\ iI^A\}$

Operationen mit Ereignissen



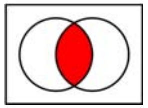
Man kann mit Ereignissen rechnen wie mit Mengen.

Vereinigung
Menge aller Elementarereignisse, die zu *A* **oder** *B* gehören



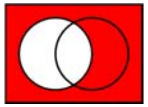
$A \cup B$

Durchschnitt
Menge aller Elementarereignisse, die zu *A* **und** *B* gehören



$A \cap B$

Komplementbildung
Menge aller Elementarereignisse des Ereignisraumes, die nicht in Ereignis *A* enthalten sind (Gegenereignis von *A*)



$\overline{A}$

Definition der Wahrscheinlichkeit

Bernoulli (1654-1705), Laplace (1749-1827)
(klassische Wahrscheinlichkeit)

Bei einem Zufallsexperiment, was endlich viele Ausgänge hat, die (zB. wegen Symmetriegründen) **gleichwahrscheinlich** sind, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (*E*) ist:

$$p(E) = \frac{\text{Anzahl der für } E \text{ günstigen Elementarereignisse}}{\text{Anzahl aller gleichmöglichen Elementarereignisse}}$$

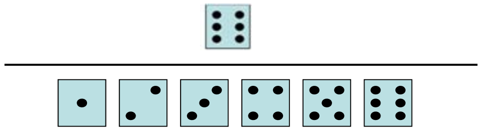
p=probability, Probabilität

Beispiele

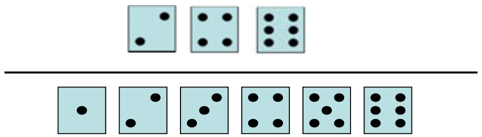
$$p(E) = \frac{g}{m}$$

Würfelexperiment:

$$p(6) = \frac{1}{6}$$



$$p(\text{gerade Zahl}) = \frac{3}{6}$$



Münzenexperiment:

$$p(\text{Kopf}) = \frac{1}{2}$$

Beispiele

$$p(E) = \frac{g}{m}$$

Blutgruppenversuch

$I^A i \quad ? \quad I^A i$

$\Omega = \{I^A I^A,\ I^A i,\ iI^A,\ ii\}$

$$p(I^A I^A) = \frac{1}{4} \qquad \frac{\{I^A I^A\}}{\{I^A I^A,\ I^A i,\ iI^A,\ ii\}}$$

$$p(\text{Blutgruppe} = A) = \frac{3}{4} \qquad \frac{\{I^A I^A,\ I^A i,\ iI^A\}}{\{I^A I^A,\ I^A i,\ iI^A,\ ii\}}$$

$$p(\text{Blutgruppe} = 0) = \frac{1}{4} \qquad \frac{\{ii\}}{\{I^A I^A,\ I^A i,\ iI^A,\ ii\}}$$

„Fahrtversuch" ? keine Symmetrie ! $\boxed{p(E) = \frac{g}{m} \neq \frac{1}{2}}$ **Beispiel**

Statistische Wahrscheinlichkeit

Zufallsexperiment $\longrightarrow$ Ereignis A / Ereignis B

Tritt bei n-maliger Durchführung eines Zufallsexperimentes ein bestimmtes Ereignis ***A*** k-mal auf, so bezeichnet man die in langen Versuchsreihen zu beobachtende relative Häufigkeit als **Wahrscheinlichkeit**, ***p(A)*** :

$$\boxed{p(A) = \frac{k}{n}}$$

Beispiele

Buffon (1707-1788): $p(A) = \frac{2048}{4040} = 0.5069$

Pearson (1857-1936): $p(A) = \frac{6019}{12000} = 0.5016$ $\quad p(A) = \frac{12012}{24000} = 0.5005$

Häufigkeit der Krankheiten:
"Die Todesursachengruppe der bösartigen Neubildungen war in 2006 für 25,6% der Todesfälle verantwortlich" (http://www.statistik.at)
p(bösart. Neub.als Todesursache)= 19 056/74 295=25,6%

die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborener das n-te Lebensjahr erlebt

Jahr	30	40	50	60	70	80	90
M	0.986	0.977	0.955	0.893	0.766	0.513	0.152
W	0.994	0.990	0.978	0.947	0.879	0.703	0.290

Österreich, 2006

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit

➡ $0 \leq p(A) \leq 1$

➡ p(sicheres Ereignis) = 1

➡ p(unmögliches Ereignis) = 0

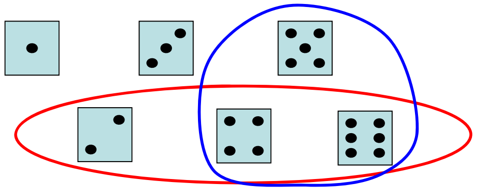
zB: p(Augenzahl des Würfels <10) = 1
p(Augenzahl des Würfels =10) = 0

im unseren Blutgruppenversuch:
p(Blutgruppe = B) = 0

Additionsregel

für Ereignisse ***A*** und ***B*** $p(\boldsymbol{A} \text{ oder } \boldsymbol{B}) = p(\boldsymbol{A})+p(\boldsymbol{B})$
ist gültig nur wenn ***A*** und ***B*** **nicht** gleichzeitig auftreten können (disjunkte Ereignisse)

zB: Würfel: p(5 oder 6)=1/6+1/6=1/3
p(gerade oder >3)=4/6=2/3≠ 1/2+1/2=1



Münze: p(Kopf oder Zahl)=1/2+1/2=1

Unabhängige Ereignisse

Wenn die Ereignisse einander nicht beeinflussen:
$p(A \text{ und } B)=p(A)\, p(B)$

zB: Würfelexperiment mit zwei Würfeln
$p(\text{beide}=6)=p(\text{erste}=6)\cdot p(\text{zweite}=6)=1/36$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Mann eines Ehepaares das 80. und die Frau das 70. Lebensjahr erreichen :
$p(M_{80} \text{ und } W_{70}) = p(M_{80})\cdot p(W_{70}) = 0.513\cdot 0.879 = 0.451 = 45.1\%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborener das *n*-te Lebensjahr erlebt

Jahr	30	40	50	60	70	80	90
M	0.986	0.977	0.955	0.893	0.766	0.513	0.152
W	0.994	0.990	0.978	0.947	0.879	0.703	0.290

Bedingte Wahrscheinlichkeit, $p(A|B)$

Die Wahrscheinlichkeit, dass *A* zutrifft unter der Voraussetzung, dass *B* eingetreten ist.
Oder: *p*(*A* gegeben *B*), *p* von *A* vorausgesetzt *B*

$$\boxed{p(A|B)=\frac{p(A\ und\ B)}{p(B)}}$$

zB: beim Würfelexperiment:

$$p(>3|\text{gerade})=\frac{p(>3\,\text{und}\,\text{gerade})}{p(\text{gerade})}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{2}{3}$$

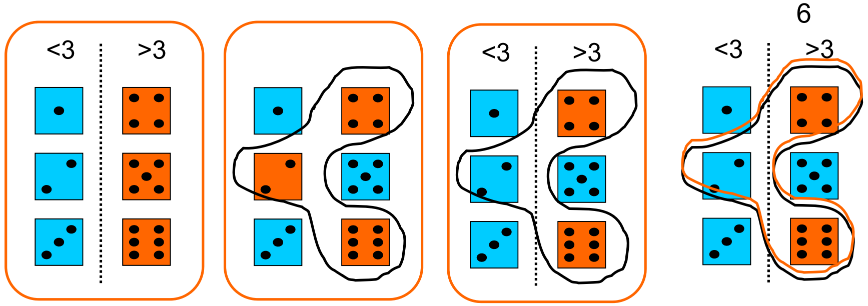
Vgl. $p(>3) = \frac{1}{2}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{p(A|B)=\frac{p(A \text{ und } B)}{p(B)}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass *A* zutrifft unter der Voraussetzung, dass *B* eingetreten ist.

zB: bei Würfelexperiment: $p(>3|\text{gerade}) = \frac{p(>3\,\text{und gerade})}{p(\text{gerade})}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{2}{3}$



p>3 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

p(gerade) $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

p>3 und gerade $\frac{2}{6}$

p(>3|gerade) $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$

Beispiele

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein 50 jähriger Mann das 80. Lebensjahr erreicht?

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborener das *n*-te Lebensjahr erlebt

Jahr	30	40	50	60	70	80	90
M	0.986	0.977	0.955	0.893	0.766	0.513	0.152
W	0.994	0.990	0.978	0.947	0.879	0.703	0.290

$p(M_{80}|M_{50})$ = 0.513 / 0.955 = 0.537

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein 60 jähriger Mann das 80. Lebensjahr erreicht?

$p(M_{80}|M_{60})$ = 0.513 / 0.893 = 0.574

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein 70 jähriger Mann das 80. Lebensjahr erreicht?

$p(M_{80}|M_{70})$ = 0.513 / 0.766 = 0.670

Beispiel (Daten: USA 1991)

p(Krankheit | Risikofaktor)

Risikofaktor: kleines Geburtsgewicht
„Krankheit“: Säuglingsmortalität

		Säuglingsmortalität		
		Krankheit ja	Krankheit nein	Teilsumme
Anzahl von Neugeborenen	Risikofaktor ja	*a*=21054	*b*=271269	*a+b*
	Risikofaktor nein	*c*=14442	*d*=3804294	*c+d*
	Teilsumme	*a+c*	*b+d*	*a+b+c+d*

p(Säuglingsmortalität | kleines Geburtsgewicht) =

$$= p(K_+|R_+) = \frac{p(K_+ \text{ und } R_+)}{p(R_+)} = \frac{\frac{a}{a+b+c+d}}{\frac{a+b}{a+b+c+d}} = \frac{a}{a+b} = \frac{21054}{21054+271269} = 0.0720$$

p(Säuglingsmortalität | normales Geburtsgewicht)=

$$= p(K_+|R_-) = \frac{p(K_+ \text{ und } R_-)}{p(R_-)} = \frac{\frac{c}{a+b+c+d}}{\frac{c+d}{a+b+c+d}} = \frac{c}{c+d} = \frac{14442}{14442+3804294} = 0.0037$$

Das relative Risiko

	K_+	K_-
R_+	a	b
R_-	c	d

Erkrankungswahrscheinlichkeit einer Risikogruppe relativ zur Erkrankungswahrscheinlichkeit einer nicht Risikogruppe.

$$\boxed{\mathrm{RR} = \frac{p(K_+|R_+)}{p(K_+|R_-)} = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{c}{c+d}}}$$

- zB: Relatives Risiko der Säuglingsmortalität mit Risikofaktor von Geburtsgewicht:

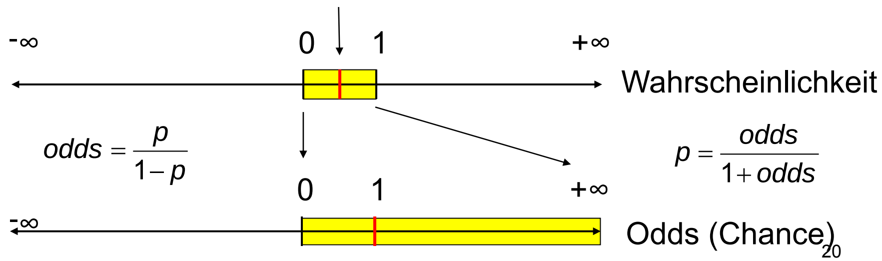
$$\mathrm{RR} = \frac{p(\text{Säuglingsmortalität | kleines Geburtsgewicht})}{p(\text{Säuglingsmortalität | normales Geburtsgewicht})}$$

$$\mathrm{RR} = \frac{0.0720}{0.0037} = 19.04$$

Charakterisierungsmöglichkeiten des Eintretens von Ereignissen

Ereignis *A*	Wahrscheinlichkeit *p*(*A*)	odds
unmögliches Ereignis	0	0
Ereignis A und Gegenereignis von A haben die gleichen Chancen	0.5	1
sicheres Ereignis	1	∞

Ereignis *A* und Gegenereignis von *A* haben die gleiche Chance



$$odds = \frac{p}{1-p}$$

$$p = \frac{odds}{1+odds}$$

Ergänzungsmaterial

Das Chancenverhältnis (Odds ratio)

	K_+	K_-
R_+	a	b
R_-	c	d

$$\boxed{OR = \frac{\dfrac{p(K_+|R_+)}{p(K_-|R_+)}}{\dfrac{p(K_+|R_-)}{p(K_-|R_-)}}} = \frac{\dfrac{\frac{a}{a+b}}{\frac{b}{a+b}}}{\dfrac{\frac{c}{c+d}}{\frac{d}{c+d}}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \left(\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}\right) = \frac{ad}{bc}$$

- zB: Chancenverhältnis der Säuglingsmortalität mit Risikofaktor von Geburtsgewicht:

$$OR = \frac{\dfrac{0.0720}{1-0.0720}}{\dfrac{0.00378}{1-0.00378}} = \frac{\dfrac{0.0720}{0.9280}}{\dfrac{0.0037}{0.99622}} = 20.4$$

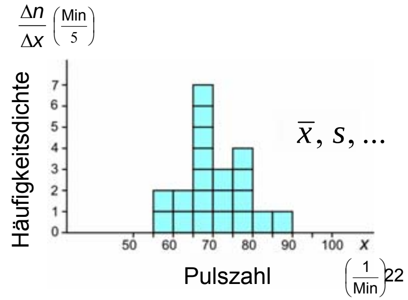
Verteilungen

Population

Wahrscheinlichkeitsverteilung

?, ?, ...

Stichprobe



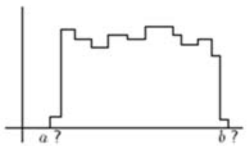
$\bar{x}, s, \ldots$

Verteilungen

Wie kann man die theoretische Verteilung bestimmen?

Vermutung

(nach dem Histogram)



Gleichverteilung?

Modellannahme

Laplace-Prinzip:
wenn nichts dagegen spricht, gehen wir davon aus, dass alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind

Laplace-Experiment:
es meint ein Zufalls-Experiment bei dem davon ausgegangen wird, dass jeder Versuchsausgang **gleichwahrscheinlich** ist

→ Gleichverteilung

Klassifizierung der Verteilungen

- **diskrete Verteilungen**
- diskrete Gleichverteilung
- Binomialverteilung
- Poisson Verteilung
- ...

diskrete Zufallsgröße

zB: Anzahl der Kranken, Augenzahl des Würfels

- **kontinuierliche Verteilungen**
- kontinuierliche Gleichverteilung
- Normalverteilung
- Chi-Quadrat Verteilung
- *t*-Verteilung
- ...

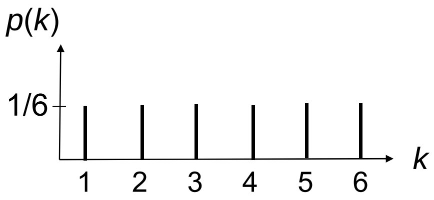
kontinuierliche Zufallsgröße

zB: Blutdruck, Körperhöhe,...

Diskrete Gleichverteilung

Beispiel:

Wertebereich	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



$$p(k) = \frac{1}{6}, \quad k = 1, 2, ..., 6$$

weitere Beispiele:

Münzenversuch 

Würfelexperiment mit einem Ikosaeder 

Lageparameter der Verteilung

Es sei X eine diskrete Zufallsgröße mit Werten $x_1, x_2 \ldots$ dann heisst

$$\boxed{\mu = \sum_i x_i p(x_i)}$$ **Erwartungswert** von *X*.

Der Erwartungswert gibt denjenigen Wert an, den man als Mittelwert (durchschnittlichen Wert) über viele Versuchswiederholungen "erwarten" kann.

Dabei ist es durchaus möglich, dass der Erwartungswert bei keinem einzigen Versuch realisiert wird oder sogar überhaupt nicht vorkommen kann.

Nützliche Formel des arithmetischen Mittelwertes

(ungewogenes) arithmetisches Mittel

Berechnung aus Einzelbeobachtungen

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

gewogenes arithmetisches Mittel

Berechnung aus gruppierten Daten (Merkmalausprägungen)

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_m x_m}{n_1 + n_2 + \ldots + n_m} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i x_i}{n} = \sum_{i=1}^{m} h_i x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i h_i$$

n_i: absolute Häufigkeit, h_i: relative Häufigkeit

Erwartungswert und Durchschnittswert

$$\mu = \sum_i x_i p(x_i) \qquad \bar{x} = \sum_i x_i h_i$$

Beispiel: 100 Würfelexperimente. 2,5,4,3,6,6,1,5,4,2,3...
Insgesamt:

x_i	n_i	h_i
1	15	15/100
2	20	20/100
3	14	14/100
4	16	16/100
5	18	18/100
6	17	17/100

$$\bar{x} = \frac{15 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 14 \cdot 3 + 16 \cdot 4 + 18 \cdot 5 + 17 \cdot 6}{100} =$$

$$= \frac{15}{100} \cdot 1 + \frac{20}{100} \cdot 2 + \frac{14}{100} \cdot 3 + \frac{16}{100} \cdot 4 + \frac{18}{100} \cdot 5 + \frac{17}{100} \cdot 6 = 3.53 =$$

$$= h(1) \cdot 1 + h(2) \cdot 2 + h(3) \cdot 3 + h(4) \cdot 4 + h(5) \cdot 5 + h(6) \cdot 6 \rightarrow$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} P(1) \cdot 1 + P(2) \cdot 2 + P(3) \cdot 3 + P(4) \cdot 4 + P(5) \cdot 5 + P(6) \cdot 6 = \mu$$

x_i: Augenzahl

n_i: absolute Häufigkeit

h_i: relative Häufigkeit

$$\boxed{\bar{x} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu}$$

Streuung der Verteilung

Es sei X eine diskrete Zufallsgröße mit Werten $x_1, x_2, \ldots$ und mit dem Erwartungswert μ. Dann nennt man die Zahl

$$\boxed{\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i)}$$

als Varianz von X, ihre Wurzel als (theoretische) Streuung (σ).

$$s \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma$$

empirische Streuung → theoretische Streuung

(Standardabweichung)

Erwartungswert und Streuung der Gleichverteilung

$x_i = 1,2,\ldots,n \qquad p(x_i) = 1/n$

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} i\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n+1}{2} = \mu}$$

$$\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12} \qquad \boxed{\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}}$$

zB: Würfel: $n=6$ $\quad \mu=3{,}5$ $\quad \sigma^2=35/12=2{,}92..$ $\quad \sigma=1{,}71...$

Ergänzungsmaterial

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i-\mu)^2 p(x_i) = \sum\left(i - \frac{n+1}{2}\right)^2 \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum\left(i^2 + \frac{(n+1)^2}{4} - i(n+1)\right) = \frac{1}{n}\sum i^2 + \frac{1}{n}\sum\frac{(n+1)^2}{4} - \frac{n+1}{n}\sum i =$$

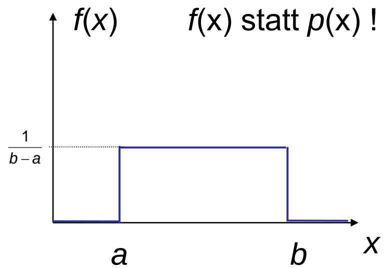
$$= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n}n\frac{(n+1)^2}{4} - \frac{n+1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \ldots = \frac{n^2-1}{12}$$

Kontinuierliche Gleichverteilung

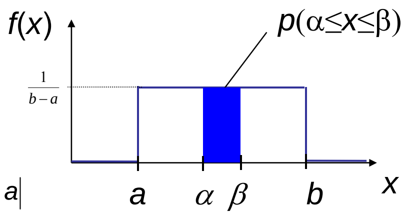
Verteilungsdichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{für } a \le x \le b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$f(x)$ statt $p(x)$!



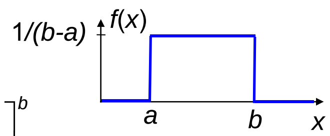
Wahrscheinlichkeit entspricht der Fläche



Erwartungswert: $\boxed{\mu = \frac{a+b}{2}}$

Streuung: $\boxed{\sigma = \frac{|b-a|}{\sqrt{12}}} = 0.289\,|b-a|$

Ergänzungsmaterial



$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \left[\frac{x^2}{2}\frac{1}{b-a}\right]_a^b =$$

$$= \left(\frac{b^2}{2}\frac{1}{b-a}\right) - \left(\frac{a^2}{2}\frac{1}{b-a}\right) = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_a^b \left(x^2 - 2\mu x + \mu^2\right)\frac{1}{b-a}dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx - \frac{2\mu}{b-a}\int_a^b x dx + \frac{\mu^2}{b-a}\int_a^b 1 dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b - \frac{2\mu}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b + \frac{\mu^2}{b-a}\left[x\right]_a^b = \ldots = \frac{(b-a)^2}{12}$$