

Az orvosi biofizika matematikai és fizikai alapjai

2. előadás

A biofizikai törvények megértéséhez szükséges minimális matematika. Fizikai mennyiségek és mértékegységeik

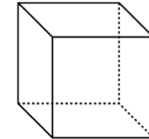
2021. szeptember 9.

AGÓCS Gergely

1

Hatványfüggvény: példa

tömeg \sim térfogat \sim [test]hossz³
felület \sim [test]hossz²



2

Hatványfüggvény

INTEGRÁLIS ALAK

VÁLTOZÓK: függő változó, független változó

$y = b \cdot x^a$

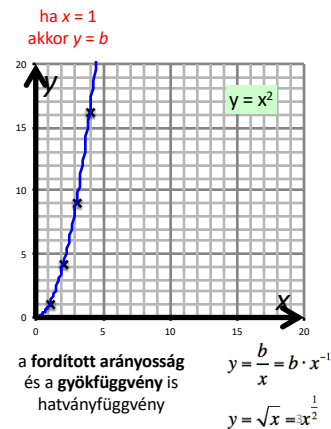
PARAMÉTEREK: preexponenciális együttható, kitevő

y-ra explicit: $y = b \cdot x^a$
x-re explicit: $x = (y/b)^{1/a}$

"DIFFERENCIÁLIS" ALAK

$\Delta y/y \sim \Delta x/x$

A függő változó relatív megváltozása arányos a független változó relatív megváltozásával



Hatványfüggvény: linearizáció

grafikus linearizáció
ábrázoljuk y-t és x-et is logos skálán:
a kapcsolat lineárisnak tűnik, de továbbra is hatványos

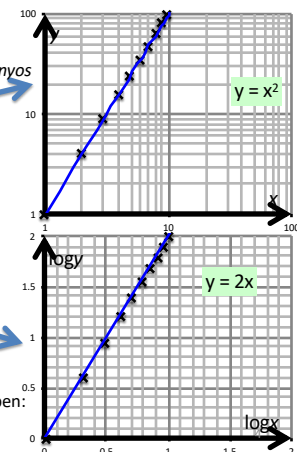
INTEGRÁLIS ALAK

$y = b \cdot x^a$

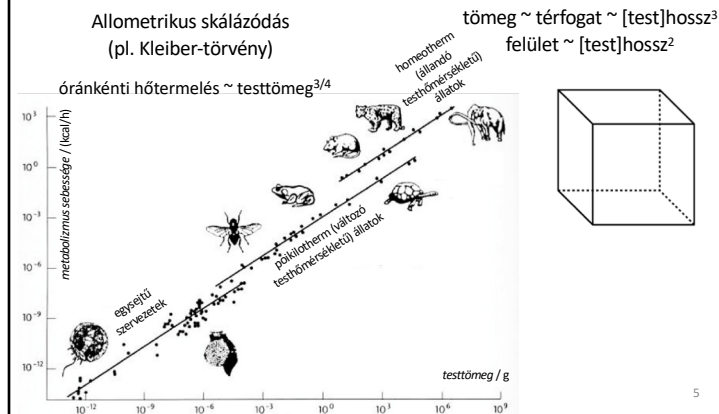
$\log y = \log(b \cdot x^a)$
 $\log y = \log b + \log(x^a)$
 $\log y = \log b + a \cdot \log x$
 $\log y = a \cdot \log x + \log b$

metszet = $\log(b)$
 $\log(1) = 0$
meredekség = a
 $a = 2$

számtani linearizáció
ábrázoljuk $\log(y)$ -t $\log(x)$ függvényében:
a kapcsolat lineáris



Hatványfüggvény: példa



Hatványfüggvény: példák a Biofizika Képlettárból

#1: de Broglie-hullámhossz
(I.3)

$$\lambda = h/p$$

$$\lambda = h \cdot p^{-1}$$

$$y = b \cdot x^a$$

#2: Stefan-Boltzmann-törvény
(II.41)

$$M_{\text{fekete}} = \sigma \cdot T^4$$

$$y = b \cdot x^a$$

#3: Duane-Hunt-törvény
(II.80)

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU_{\text{anode}}}$$

$$\lambda_{\min} = hc/e \cdot U^{-1}$$

$$y = b \cdot x^a$$

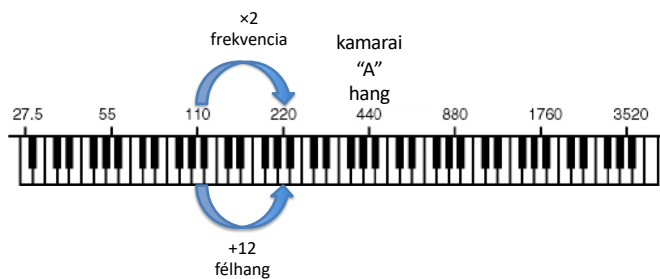
#4: a sajátfrekvencia tömegfüggése
(Rezonancia 6)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f_0 = k^{1/2} / (2\pi) \cdot m^{-1/2}$$

$$y = b \cdot x^a$$

Logaritmusfüggvény: példa



Logaritmusfüggvény

INTEGRÁLIS ALAK

$$y = b \cdot \log_a(x)$$

GYAKORLATI MEGFONTOLÁSOK:

- az alap 10 (néha e vagy 2)
- ha az alapot rögzítjük, a szorzóparaméter megváltozik a következőképpen:

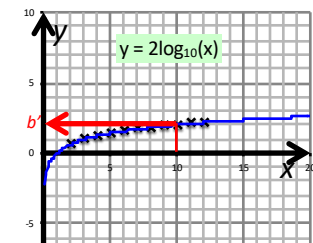
$$b \cdot \log_a(x) = b / \log_{10}(a) \cdot \log_{10}(x) = b' \cdot \log_{10}(x)$$

VÁLTOZÓK: függő változó független változó

$$y = b' \cdot \log_{10}(x)$$

PARAMÉTEREK: szorzó paraméter

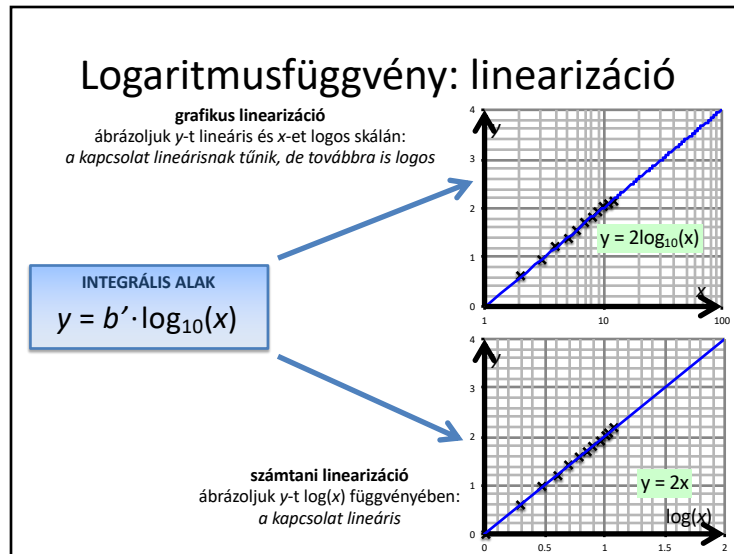
ha $x = 10$
akkor $y = b'$



„DIFFERENCIÁLIS” ALAK

$$\Delta y \sim \Delta x/x$$

A függő változó **megváltozása** arányos a független változó **relatív megváltozásával**



Logaritmusfüggvény: példák

a Biofizika Képlettárból ...és máshonnan

#1: az entrópia statisztikus definíciója (III.72)
 $S = k \ln \Omega$
 $S = k \cdot \log_e(\Omega)$
 $y = b \cdot \log_a(x)$

#2: a decibel- (dB-) skála (VII.10)
 $n = 10 \log A_p$
 $n = 10 \cdot \log_{10}(A_p)$
 $y = b \cdot \log_a(x)$

#3: az abszorbanca definíciója (VI.34)
 $A = \lg(J_0/J)$
 $A = 1 \cdot \log_{10}(J_0/J)$
 $y = b \cdot \log_a(x)$

#4: a pH-skála
 $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$
 $\text{pH} = -1 \cdot \log_{10}([\text{H}^+]/(1 \text{ M}))$
 $y = b \cdot \log_a(x)$

Függvények összefoglalása

LINEÁRIS FÜGGVÉNY

$\Delta y \sim \Delta x$

A függő változó **abszolút megváltozása** arányos a független változó **abszolút megváltozásával**

y vs. x

EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY

$\Delta y/y \sim \Delta x$

A függő változó **relatív megváltozása** arányos a független változó **abszolút megváltozásával**

logy vs. x

Linearizáció

LOGARITMUSFÜGGVÉNY

$\Delta y \sim \Delta x/x$

A függő változó **abszolút megváltozása** arányos a független változó **relatív megváltozásával**

y vs. logx

HATVÁNYFÜGGVÉNY

$\Delta y/y \sim \Delta x/x$

A függő változó **relatív megváltozása** arányos a független változó **relatív megváltozásával**

logy vs. logx

Derivált és integrál: példa

Δ Δ

x	$y = x^2$	$y' = \Delta y / \Delta x$	$y'' = \Delta(\Delta y / \Delta x) / \Delta x$
0	0		
1	1		
2	4		
3	9		
4	16		
5	25		
6	36		
7	49		
8	64		
9	81		
10	100		

Σ Σ

Derivált és integrál: példa

x	y = x ²	y' = Δy/Δx	y'' = Δ(Δy/Δx)/Δx
0	0		
1	1	1	
2	4	3	2
3	9	5	2
4	16	7	2
5	25	9	2
6	36	11	2
7	49	13	2
8	64	15	2
9	81	17	2
10	100	19	2

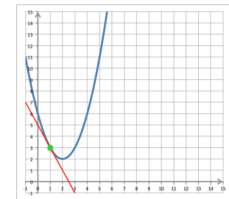
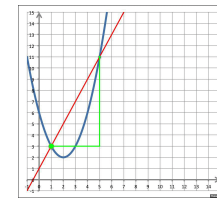
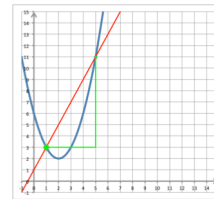
13

Derivált: az érintő meredeksége

differenciáhányados:
Δy/Δx
a szelő meredeksége

Δ → d

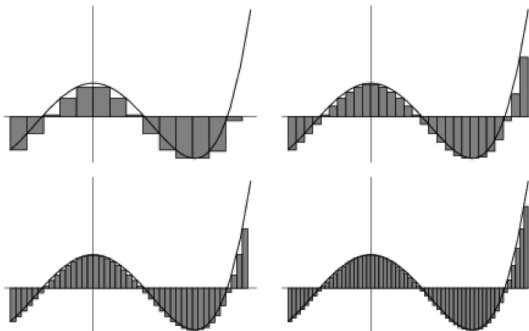
differenciálhányados
(= derivált):
dy/dx
az érintő meredeksége



14

Integrál: görbe alatti terület

Σ → ∫



15

Egyenes vonalú mozgások

Mennyiségek, egységek és egyenletek

elmozdulás: Δs = s₂ - s₁ [Δs] = m
sebesség: v = Δs/Δt [v] = m/s
gyorsulás: a = Δv/Δt [a] = m/s²

Egyenes vonalú egyenletes mozgás

s_t = s₀ + v · t
v = konstans
a = 0

Egyenes vonalú egyenletes gyorsulás

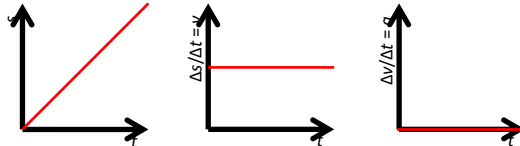
s_t = s₀ + v₀ · t + a/2 · t²
v_t = v₀ + a · t
a = konstans

16

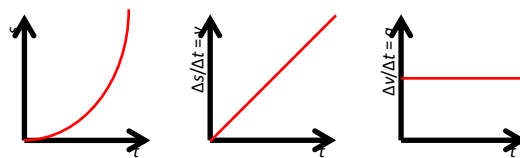
Derivált és integrál: alkalmazás

Egyenes vonalú mozgás

egyenestől egyenletes mozgás:



egyenestől egyenletes gyorsulás:



17

Körmozgás

Mennyiségek, egységek és egyenletek

elfordulás: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$
 szögsebesség, körfrekvencia: $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$
 kerületi sebesség: $v = r \cdot \Delta\varphi/\Delta t = r \cdot \omega$

$[\Delta\varphi] = \text{rad}$
 $[\omega] = \text{rad/s}$
 $[v] = \text{m/s}$

centripetális gyorsulás: $a_{cp} = v^2/r = r \cdot \omega^2$

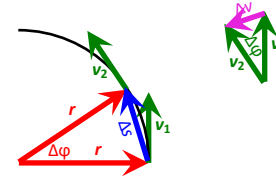
$[a] = \text{m/s}^2$

(1) közelítés kis szögek esetén:
 elmozdulás = ívhossz = $v \cdot \Delta t \approx \Delta s$

(2) hasonlóság miatt:
 $\Delta v/v = \Delta s/r$

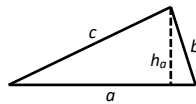
(1) + (2):
 $\Delta v/v = v \cdot \Delta t/r$

$a_{cp} = v^2/r$



18

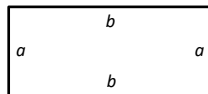
Kerület és terület



HÁROMSZÖG
 kerület: $a+b+c$
 terület: $a \cdot h_a/2$



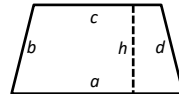
KÖR
 kerület: $2\pi r$
 terület: $r^2\pi$



TÉGLALAP
 kerület: $2 \cdot (a+b)$
 terület: $a \cdot b$



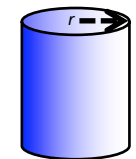
NÉGYZET
 kerület: $4a$
 terület: $a \cdot a = a^2$



TRAPÉZ
 kerület: $a+b+c+d$
 terület: $(a+c)/2 \cdot h$

19

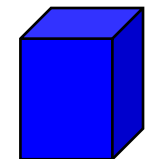
Felszín és térfogat



HENGER (nyitott)

felszín (csak palást): $2\pi r \cdot h$

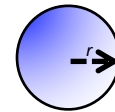
térfogat: $r^2\pi \cdot h$



HASÁB (nyitott)

felszín (csak palást):
 (alap kerülete) $\cdot h$

térfogat: (alapterület) $\cdot h$



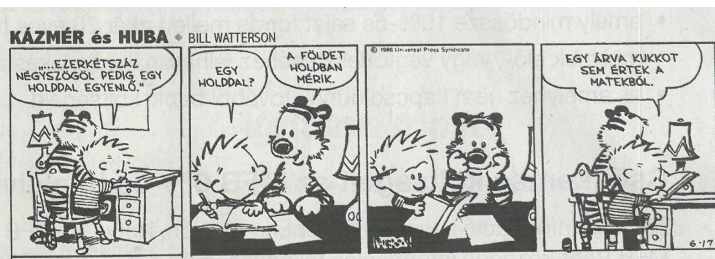
GÖMB

felszín: $4\pi r^2$

térfogat: $4\pi r^3/3$

20

Egységek – átváltás



21

Egységek – átváltás

„van prefixum”-ból „nincs prefixum”:

$$15 \text{ km} = 15 \cdot 10^3 \text{ m}$$

$$15 \text{ cg} = 15 \cdot 10^{-2} \text{ g}$$

„nincs prefixum”-ból „van prefixum”:

$$15 \text{ m} = 15 / 10^3 \text{ km}$$

$$15 \text{ g} = 15 / 10^{-2} \text{ cg}$$

„van prefixum”-ból „van prefixum”:

$$15 \text{ km} = 15 \cdot 10^3 \text{ m} = 15 \cdot 10^3 / 10^{-2} \text{ cm}$$

ha az egységnek van kitevője is:

$$15 \text{ km}^3 = 15 \cdot (10^3 \text{ m})^3 = 15 \cdot (10^3)^3 \text{ m}^3$$

$$15 \text{ m}^3 = 15 / (10^3)^3 \text{ km}^3$$

literből köbméter és viszont:

$$1 \text{ m}^3 = 10 \text{ hL} = 1000 \text{ L}$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$$

$$1 \text{ mm}^3 = 1 \text{ }\mu\text{L}$$

idő másodpercben:

$$2 \text{ days } 3 \text{ h } 12 \text{ min } 30 \text{ s} = ((2 \cdot 24 \cdot 3600) + (3 \cdot 3600) + (12 \cdot 60) + 30) \text{ s}$$

fok, ívperc, ívmásodperc:

$$45^\circ 40' 30'' = (45 + 40/60 + 30/60^2)^\circ$$

fokból radián és viszont:

$$1 \text{ rad} = (360/2\pi)^\circ$$

$$1^\circ = (2\pi/360) \text{ rad}$$

összetett egységek:

$$15 \text{ kg/m}^3 = 15 \cdot 10^3 / (1/(10^{-2})^3) \text{ g/cm}^3$$

$$45 \text{ km/h} = 45 \cdot 10^3 / 3600 \text{ m/s}$$

Celsius-fokból kelvin és viszont:

$$T = 15^\circ\text{C} = (15 + 273) \text{ K}$$

$$T = 15 \text{ K} = (15 - 273)^\circ\text{C}$$

$$\Delta T = 15^\circ\text{C} = 15 \text{ K}$$

$$\Delta T = 15 \text{ K} = 15^\circ\text{C}$$

22