Orvosi statisztika, informatika és telemedicina

4. előadás:
Becslés és megbízhatóság
2021. szeptember 29.
Agócs Gergely

Források: – **Herényi L (2016): Statisztika és Informatika: 14. fejezet**
– Reiczigel J, Harnos A, Solymosi N (2014): Biostatisztika nem statisztikusoknak: 5. fejezet
– WolframMathWorld: Probability and Statistics: http://mathworld.wolfram.com/topics/ProbabilityandStatistics.html

Az előadás témája

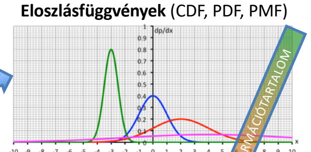
- A **becslés** célja, típusai és folyamata
  - minta és alapsokaság más néven populáció
  - **pontbecslés** és **intervallumbecslés**
  - minta, becslés, becsült és becslő érték
- **Standard hiba** (*SE*) megértése
- **Konfidenciaintervallum** (CI) megértése
  - konfidenciaintervallumok helyes értelmezése
  - konfidenciaintervallumok helyes feltüntetése
- Megtanulni egyes paraméterek **becslését**:
  - valószínűség (röv.: **valség**) más néven alapsokaságbeli arány
  - **várható érték** más néven alapsokaságbeli átlag
  - elméleti **variancia** (más néven szórásnégyzet) és elméleti **szórás**
- **R Commander**-függvények használata becsléshez

A becslés célja

Alapsokaság:
a kérdésfelvetésnek megfelelő összes lehetséges megfigyelés (sokszor végtelennek elemű) halmaza. Minden vizsgálatunk erre a halmazra irányul.

Pl.: - testmagasság cm-ben
- szemszín
- terhességek száma
- sugárkárosodás foka
- ...

Eloszlásfüggvények (CDF, PDF, PMF)



CSÖKKENŐ INFORMÁCIÓTARTALOM

Paraméterek (μ, σ^2, σ...)

Egyes **Valószínűségek**

De hogyan határozhatjuk meg ezeket?

A becslés célja

De hogyan határozhatjuk meg ezeket?

Példa: érmefeldobás

Modellalkotás (pusztán elméleti megfontolások)

P(fej) = 1/2 & *P*(írás) = 1/2

- két elemi esemény, melyek
- azonos valségűek (= *feltesszük*, hogy az érme szabályos) és
- egyetemesek

következtetéseink csak annyira lehetnek igazak, mint a feltételezéseink

Kísérlet, megfigyelés

Ez azt jelenti, hogy az érmét ténylegesen feldobjuk, de persze nem végezhetjük el az összes lehetséges megfigyelést, mert:
- eleve lehetetlen (végtelen számú ismétlés)
- nem célszerű (pl. töréseszt)
- sokba kerül (időbe, pénzbe...)

A becslés folyamata

Alapsokaság: - eloszlás
- paraméterek

Az alapsokaság mérete (végtelennek vesszük) nem teszi lehetővé, hogy minden elemét megfigyeljük: **a közvetlen megfigyelés nem lehetséges**

Mintavétel

VÉLETLEN!

Minta: - eloszlás
- paraméterek

Emiatt az alapsokaságnak csak egy viszonylag kis részhalmazát vizsgáljuk. Ezt nevezzük **mintának**.

MATEK

Megvizsgáljuk a mintaelemeket, majd az így keletkező adathalmazt (melyet szintén mintának nevezünk) fogjuk függvényekkel és számokkal **jellemezni**.

KÖVETKEZTETÉS

BIZONYTALANSÁG!

A minta **jellemzőit** felhasználhatjuk az alapsokaságra vonatkozó **következtetések** levonására

4

Mintavétel: hibalehetőségek

Milyen a jó minta?

A minta eloszlása megfelel az alapsokaság eloszlásával, vagyis a különféle változó értékek azonos arányban vannak **reprezentálva** a mintában és az alapsokaságban (reprezentativitás)

Tipikus mintavételi startégiák:

- **egyszerű véletlen mintavétel**: az alapsokaság valamennyi eleme közül véletlenszerűen (azonos bekerülési valószínűséggel) választjuk ki a mintaelemeket
- **rétegzett mintavétel**: az alapsokaságot bizonyos tulajdonságok (pl. nem, korcsoport) mentén rétegekre osztjuk, majd ezekből arányosan válogatunk be veletlenül elemeket

Néhány gyakori probléma:

- **mintavétel körének hibás megválasztása**
  - pl. meg szeretném ismerni a táplálkozási szokásokat Magyarországon, de csak egyetemistákat vizsgálok
- **önkéntesség okozta hiba**
  - önkéntes részvétel esetén a motiváltabbaktól kapunk adatokat (pl. nagyon elégedetlenek)
- **válaszmegtagadás okozta hiba**
  - akkor okozhat problémát, ha a választ megtagadók halmaza a vizsgált változóra nézve eltér a válaszolni hajlandók halmazától

5

Becslések típusai

Az emberek hány százaléka tartozik az Rh+ vércsoportba?

Nem vizsgálhatunk meg minden embert.

Vegyük az emberek egy részhalmazát (**minta**) és vizsgáljuk meg ezek elemeit.

Pontbecslés:

kb.
85%

csak egyetlen érték, melyet **becslő értéknek** nevezünk

Mennyire bízhatunk meg ebben a *számban*?
Fogalmunk sincs!

A **bizalom szintje**, melyet ebbe a *tartományba* vethetünk, kifejezve egy **valószínűséggel**

Intervallumbecslés:

83% – 87%
között

95%-os
megbízhatósággal

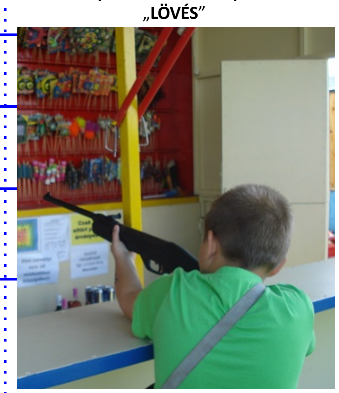
tartomány
(becslő érték és hiba)
+ valószínűség

6

Pontbecslés

Elméleti (alapsokaságot jellemző) értékek:
„CÉL"

Becslő (mintából számolt) értékek:
„LÖVÉS"



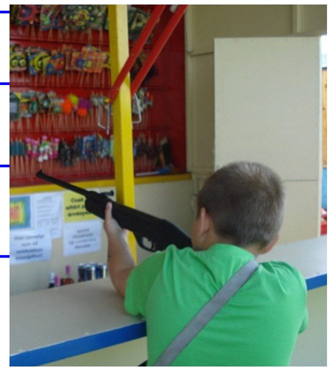
7

Pontbecslés

Elméleti (alapsokaságot jellemző) értékek: „CÉL”

- valség vagy arány
  (p = *probability*)
- várható érték, „az alapsokaság átlaga”
  ($E(\xi)$ = *expected value* vagy μ [mü])
- elméleti variancia
  ($Var(\xi)$ = *variance* vagy σ^2 [szigma négyzet])
- elméleti szórás
  ($SD(\xi)$ = *standard deviation* vagy σ [szigma])

Becslő (mintából számolt) értékek: „LÖVÉS”



8

Pontbecslés

Elméleti (alapsokaságot jellemző) értékek: „CÉL”	Becslő (mintából számolt) értékek: „LÖVÉS”
- valség vagy arány (p = *probability*)	- relatív gyakoriság ($\hat{p}$ [p kalap])
- várható érték, „az alapsokaság átlaga” ($E(\xi)$ = *expected value* vagy μ [mü])	- minta átlaga ($\bar{x}$ [x vonás])
- elméleti variancia ($Var(\xi)$ = *variance* vagy σ^2 [szigma négyzet])	- minta korrigált varianciája (s^2)
- elméleti szórás ($SD(\xi)$ = *standard deviation* vagy σ [szigma])	- minta korrigált szórása (s, *SD* = *standard deviation*)

9

Pontbecslés

1. feladat: Meg szeretnénk becsülni a kékszeműek arányát, valamint a testmagasság várható értékét, elméleti varianciáját és elméleti szórását a SOTE-s gólyák (elsőéves hallgatók) körében.

Egy 15-elemű mintát vettünk (lásd a táblázatot). Használjuk az Excel-t az elméleti paramterek pontbecslésére! (lásd 1. év Biofizika tantárgy) Adattábla: Stat21_04_adat1.xlsx

p(kék szem) ≈ $\hat{p}$ =4/15 = 0.2667 = 26,67%

μ(testmagasság) ≈ $\bar{x}$ =ÁTLAG(*adat*) = 170 cm

σ^2(testmagasság) ≈ s^2 =VAR.M(*adat*) = 107,5 cm^2

σ(testmagasság) ≈ s =SZÓR.M(*adat*) = 10,4 cm

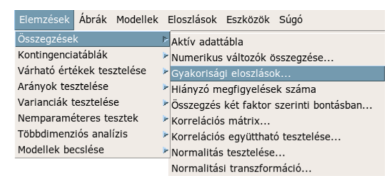
megfigyeles_ azonositoja	szemszin	magassag _cm
1	barna	163
2	barna	153
3	zold	152
4	barna	158
5	egyeb	167
6	kek	184
7	kek	165
8	barna	184
9	kek	175
10	barna	167
11	zold	178
12	egyeb	168
13	barna	173
14	kek	178
15	egyeb	180

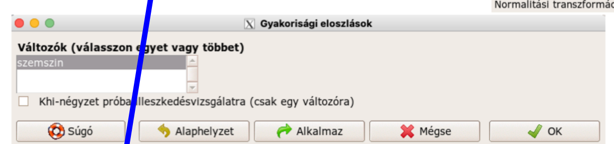
10

Pontbecslés

Használjuk az R Commander-t
az elméleti paramterek pontbecslésére!

p(kék szem) ≈ $\hat{p}$ = 26,67%






```
counts:
szemszin
barna egyeb   kek  zold
    6     3     4     2

percentages:
szemszin
barna egyeb   kek  zold
40.00 20.00 26.67 13.33
```

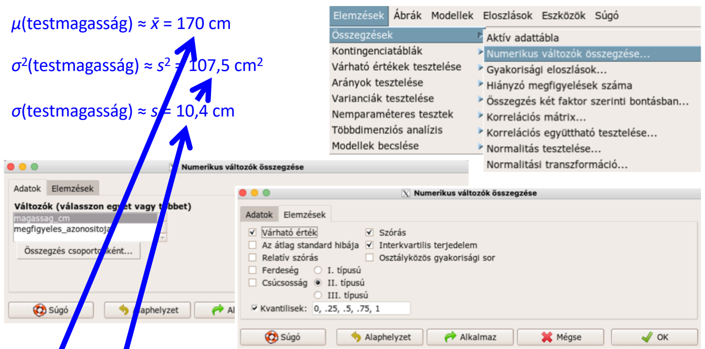
11

Pontbecslés

μ(testmagasság) ≈ $\bar{x}$ = 170 cm

σ^2(testmagasság) ≈ s^2 = 107,5 cm^2

σ(testmagasság) ≈ s = 10,4 cm




```
     mean       sd IQR  0% 25% 50% 75% 100%  n
 169.6667 10.36937  14 152 164 168 178  184 15
```

12

A becslés hibája

- A megismételt becslések egy sor becslő értéket eredményeznek, amelyek különböznek egymástól a **mintavétel véletlenszerűsége** miatt (**véletlen hiba**)
- Tehát **a becslő érték maga is egy véletlen változó**, melynek van elméleti eloszlása, várható értéke, elméleti szórása stb.
- A becslő érték elméleti szórását standard hibának (*standard error*, *SE*) nevezzük

A következő diákon megtanuljuk, hogyan lehet meghatározni az alábbi két becslő érték standard hibáját:

Arányok elméleti eloszlása:
Binomiális eloszlás

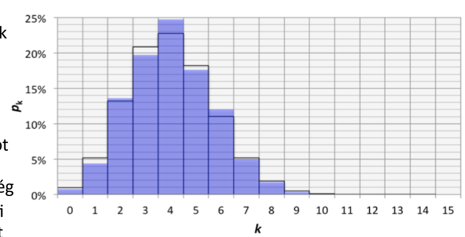
Átlagok elméleti eloszlása:
Student-féle t-eloszlás ($df = n - 1$)

13

(Kiegészítés: Arány standard hibája)

1. példa: Meg szeretnénk becsülni a kékszemű hallgatók arányát a gólyák mint alapsokaság között. Egy n = 15 elemű mintát veszünk, melyben a kék szemek száma k = 4-nek adódik. Mármegtanultuk, hogy az alapsokaságon belüli arány (azaz valség, p) becslő értéke a relatív gyakoriság ($\hat{p} = k/n$), mely esetünkben 4/15 = 0,2667 . Mekkora a becslés hibája?

Tegyük fel, hogy a becsült érték megegyezik a becslő értékkel: p = 4/15. Számítógépes szimulációt használva vegyünk 800 ilyen mintát és készítsünk relatív gyakorisági hisztogramot a kékszeműek mintánkénti k számából (kék oszlopok). Ez elég jól közelíti a megfelelő elméleti eloszlást: a binomiális eloszlást (fekete vonalrajz).



14

(Kiegészítés: Arány standard hibája)

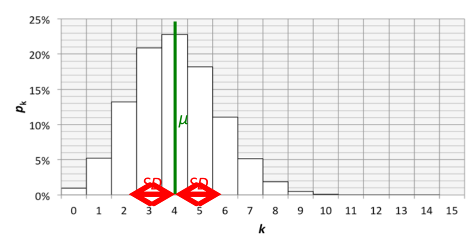
Az itt megadott képletekkel számoljuk ki ezen binomiális eloszlás paramétereit (μ, σ^2 és σ).

Sikerek számának várható értéke:
$\mu = np = 4$

Sikerek számának elméleti varianciája:
$\sigma^2 = np(1–p) = 44/15 = 2,933$

Sikerek számának elméleti szórása:

$SD = \sqrt{np(1-p)} = 1,713$



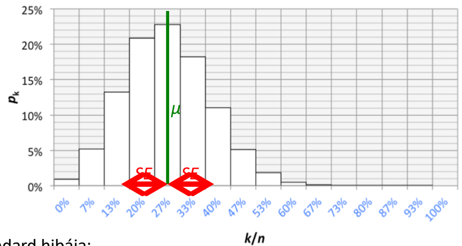
15

(Kiegészítés: Arány standard hibája)

Mivel arányokat becslünk, ezért a *k* változót *k*/*n* aránnyá kell alakítanunk, vagyis a vízszintes tengelyt át kell skáláznunk *n*-nel való osztással.

Ugyanezt kell tennünk a binomiális eloszlás μ és σ paramétereivel is.

Sikerek arányának várható értéke:
$\mu = p = 4/15$

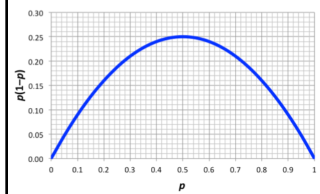


Sikerek arányának elméleti szórása = az arány standard hibája:

$$SE = \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}1142$$

$$SE_{arány} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx \sqrt{\frac{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}{n}}$$

(Kiegészítés: Arány standard hibája)



arányok elméleti eloszlása:
binomiális eloszlás
(mintaméretre normalizálva)

$$\max\left(SE_{arány}\right) = \frac{1}{\sqrt{4n}}$$

Mekkora az *n*-elemű mintából számolható arányok lehető legmagasabb standard hibája?

A $p(1–p)$ szorzat akkor maximális, ha $p = 1–p = 0{,}5$. Ez esetben $p(1–p) = 0{,}25$ így a *SE* :

$$\max\left(SE_{arány}\right) = \sqrt{\frac{0{,}5(1-0{,}5)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}25}{n}} = \frac{1}{\sqrt{4n}}$$

Ha egy tanulmány ugyanazon mintából (vagy azonos elemszámú mintákból) becsült több valséget is tartalmaz, akkor gyakran csak a maximális standard hibát adják meg a fenti képlet segítségével.

Pl. egy $n = 100$-elemű mintából számolt arány esetén a *SE* legfeljebb 0,05 lehet.

(Kiegészítés: Arány standard hibája)

2. feladat: Mi a sarlósejtes anémia (SC) génhordozóinak *prevalenciája* (népességen belüli aránya) és a becslés standard hibája Nigériában, ha 172 vizsgált emberből 43 hordozta a betegség génjét?

Hordozók mintabeli aránya: $\hat{p}$ (SC) = *k*(SC)/n = 43/172 = 0,25 . A hiba az imént tanult képlettel számolható:

$$SE_{arány} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}25\cdot(1-0{,}25)}{172}} = 0{,}033 = \underline{3{,}3\%}$$

3. feladat: Szeretnénk egy vizsgálatban megbecsülni egyes krónikus betegségek budapesti prevalenciáját. Milyen mintaméretet javasolnál, ha nem akarjuk, hogy a becslés hibája az 1%-ot meghaladja?

Mivel konkrét valséget vagy arányt nem ismerünk, a „legrosszabb esetnek" tekinthető 0,5-ös valséggel kell számolnunk, melynek adott mintaméret esetén a legnagyobb a standard hibája

$$SE_{arány} \le \frac{1}{\sqrt{4n}}$$

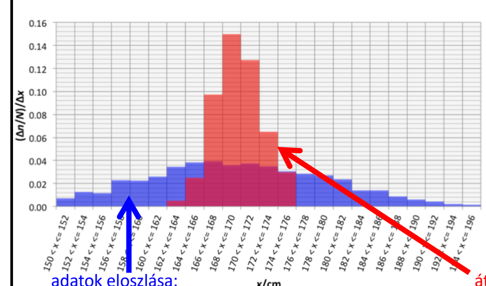
A képletet átrendezve kapjuk *n*-t:

$$n \le \frac{1}{4\left(SE_{arány}\right)^2} = \frac{1}{4\cdot 0{,}01^2} = \underline{2500}$$

Vagyis egy 2500-as mintaelemszám garantálja, hogy egy esetleges 0,5-ös prevalencia becslési hibája sem haladja meg az 1%-ot. (A ≤ jel azt jelenti, hgoy 0,5 alatti vagy feletti prevalenciák esetén kisebb minták is elégségesek lennének az *SE* 1% alatt tartására.)

Átlag standard hibája

2. példa: Meg szeretnénk becsülni a gólyák testmagasságát. Vettünk egy $n = 15$ hallgatóból álló mintát, melyből az átlag $\bar{x} = 170$ cm-nek, korrigált szórás $s = 10$ cm-nek adódott. Számítógépes szimulációval állítsuk elő az adateloszlást és a mintaátlagok eloszlását $n = 15$-elemű mintákra.



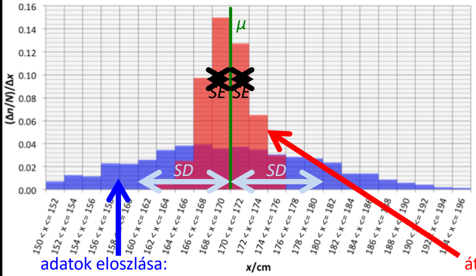
adatok eloszlása:
$\bar{x}$ = 170,01 cm
SD = 9,947 cm

átlagok eloszlása:
$\bar{x}$ = 170,01 cm
szórás = 2,507 cm

Kétszáz mintavétel (összesen 3000 elem) szimulálása tisztán mutatja, hogy az átlagok eloszlása lényegesen „keskenyebb", mint az adatoké. De mennyivel?

Átlag standard hibája

Ha az adatok szórását osztjuk a mintaelemszám (n) gyökével, megkapjuk az átlagok szórását. Ez utóbbit nevezzük az **átlag standard hibájának** ($SE_{átlag}$). Az átlagok eloszlása (legalábbis közelítőleg) normális a **centrális határeloszlás tétele** miatt.



$$SE_{átlag} = s_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

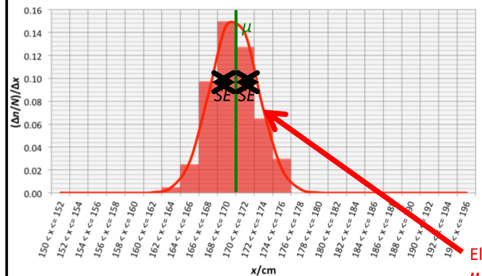
adatok eloszlása:
$\bar{x}$ = 170,01 cm
SD = 9,947 cm

átlagok eloszlása:
$\bar{x}$ = 170,01 cm
$SD/n^{0,5}$ = 9,947 cm/3,872 = 2,568 ≈ $SE_{átlag}$ = 2,507 cm

20

Átlag standard hibája

Azonban az átlag hibáját ($SE_{átlag}$) többnyire a minta szórásából számoljuk, így eloszlása n–1 szabadsági fokú (*degrees of freedom*, *df*) **Student t-eloszlás** lesz. Ez az eloszlás nagy *df* esetén hasonlít a normális eloszláshoz, kis *df* esetén azonban jelentősen „nehezebbek” a szélei (leptokurtotikus).



William S. **Gosset**
1876–1937
“Student”

$$SE_{átlag} = s_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Elméleti modell: t-eloszlás
$\mu \to \bar{x}$ = 170,01 cm
$\sigma \to SE$ = 2,507 cm
$df = n–1 = 14$

21

Átlag standard hibája

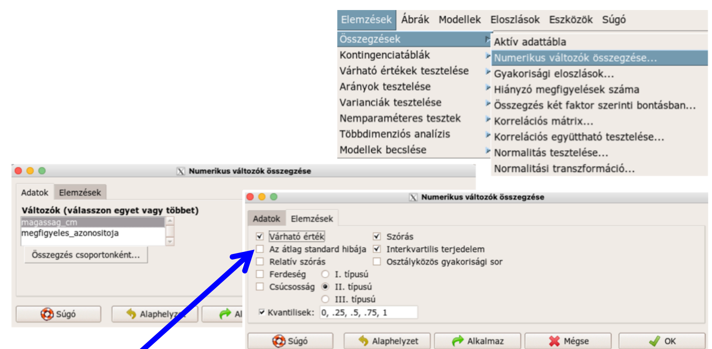
4. feladat: Meg szeretnénk becsülni a banán átlagos tömegét (várható értékét). Lemértünk öt banánt, az eredmények: 134 g, 152 g, 158 g, 141 g, 170 g. Add meg a becslés hibáját.
n = 5
$\bar{x}$ = 151 g
SD = 14,14 g
$SE_{átlag}$ = **6,32 g**

5. feladat: egy tudományos cikkben a következő mondat szerepelt: “*... a kísérletben használt patkányok átlagtömege 420 g (SE = 20 g), míg átlagos életkora 5 hónap volt ...*” A patkányok számáról azonban nem tesznek említést. Mit gondolsz, hány patkányt használhattak, ha máshonnan tudjuk, hogy az ilyen korú patkányok tömegének szórása kb. 40 g?
Az átlag szórása egyenlő a változó szórása osztva a mintaelemszám gyökével. Rendezzük át ezt a képletet n-re:
$n = (SD/SE)^2 = (40\ g/20\ g)^2 = 2^2 =$ **4**

Megjegyzés: Ez egy eléggé alacsony elemszám egy vizsgálathoz, mely megmagyarázhatja, hogy a szerzők miért nem említették meg. Ez viszont az egész cikk hitelét megkérdőjelezi...

22

Átlag standard hibája



ezt kell bejelölni az imént már mutatott R Commander függvényben, ha az átlag hibáját is fel akarjuk tüntetni.

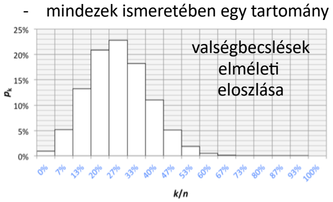
23

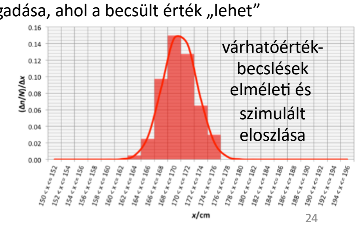
Intervallumbecslés

Az intervallum becslés során a becsült értékhez tartományt rendelünk (a becslő érték mint valségi változó skáláján egy alsó és egy felső határt), melynek neve **konfidenciaintervallum** (angolul *confidence interval*, jele: **CI**) és ehhez egy valséget, melynek neve **konfidenciaszint** (jele: 1–α), mely a becslési eljárás megbízhatóságát fejezi ki (konfidencia = megbízhatóság).

A CI létrehozásának tipikus lépései:

- mintavétel
- pontbecslés kiszámítása a mintaadatokból
- pontbecslés valószínűségi eloszlásának meghatározása
- az eloszlás alapján standard hiba számítása (opcionális)
- mindezek ismeretében egy tartomány megadása, ahol a becsült érték „lehet”



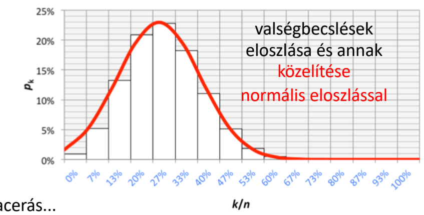


Intervallumbecslés valségre

Mi a valsége, hogy egy véletlenül kiválasztott gólyának kék szeme van?

A CI létrehozásának lépései:

- mintavétel: n elemű mintában k kék szemű
- pontbecslés: $p_k \approx k/n = \ldots$
- a becslő érték elméleti eloszlása: binomiális eloszlás
- *SE*: $SE_{arány} \approx \sqrt{\dfrac{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}{n}} = \ldots$
- a megfigyelt k értékek binomiális eloszlást követnek, melyet át kell skálázunk k/n-re. Lehet ezzel az is számolni (ún. egzakt eljárás) de macerás…
- könnyebb ehelyett a normális eloszlással való közelítést használni: Wald-intervallum (egyszerű és elterjedt, de eléggé megbízhatatlan módszer)



Intervallumbecslés valségre

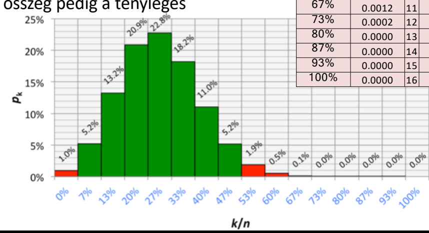
1. módszer: egzakt eljárás

- számold ki minden egyes kimenetel (k) valségét a becsült p felhasználásával, és rendezd őket csökkenő valség szerint
- kezdd el ezeket összeadogatni kezdve a legnagyobb valséggel, majd a második legvalószínűbbel s.í.t.
- ha az összeg meghalad egy előre kiválasztott limitet, állj meg
- a kimenetelek tartománya, mely bekerült a végső összegbe, lesz az egzakt CI, maga a végső összeg pedig a tényleges konfidenciaszint (1–α)

k/n	p_k	#	SZUMHA
0%	0.0095	9	0.9933
7%	0.0520	6	0.9134
13%	0.1324	4	0.7510
20%	0.2087	2	0.4364
27%	0.2277	1	0.2277
33%	0.1821	3	0.6185
40%	0.1104	5	0.8614
47%	**0.0516**	**7**	**0.9650**
53%	0.0188	8	0.9838
60%	0.0053	10	0.9986
67%	0.0012	11	0.9998
73%	0.0002	12	1.0000
80%	0.0000	13	1.0000
87%	0.0000	14	1.0000
93%	0.0000	15	1.0000
100%	0.0000	16	1.0000

3. példa:

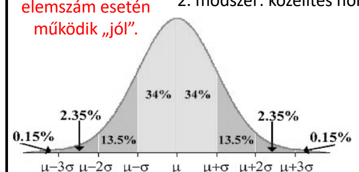
- használjuk az 1. példa adatait
- lásd a kiszámolt táblázatot és a grafikont, mely a **95% -os (valójában 96,5%-os) CI-t mutatja: 7% – 47%**

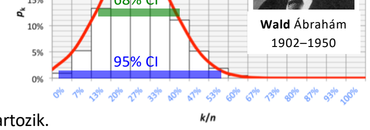


Intervallumbecslés valségre

A közelítés n > 30 elemszám esetén működik „jól”.

2. módszer: közelítés normális eloszlással (Wald Á.)





Wald Ábrahám
1902–1950

A $\mu \pm \sigma$ közötti tartományhoz kb. 68% valség tartozik.
Az így definiált becslési tartomány neve **68%-os konfidencia-intervallum (CI)**, a valségé pedig **konfidenciaszint (1–α)**.
A 3. példában: 68% CI = 15% – 38%. (lásd a jobb oldali ábrát is)

$$68\%\ CI \approx \frac{k}{n} \pm \sqrt{\frac{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}{n}}$$

A $\mu \pm 2\sigma$ közötti tartományhoz kb. 95% valség tartozik.
Ez a **95%-os konfidenciaintervallumnak** felel meg, és igen gyakran használják az élettudományokban. Kis mintáknál ez a CI akár ki is lóghat a [0,1] tartományból! –> széleit le kell nyesni.
A 3. példában: 95% CI = 4% – 50%. (lásd a jobb oldali ábrát és vö. az egzakt intervallummal.)

$$95\%\ CI \approx \frac{k}{n} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}{n}}$$

(Kiegészítés: Intervallumbecslés valségre)

6. feladat: Meg szeretnénk becsülni a Rhesus faktor *prevalenciáját* (alapsokaságon belüli arányát) a budapesti lakosság körében. Véletlenszerűen kiválasztottunk 42 embert, s meghatároztuk a vércsoportjukat: 35 volt Rh+.

a) Adj pontbecslést a Rhesus faktor prevalenciájára.

p(Rh+) ≈ $\hat{p}$ (Rh+) = k(Rh+)/n = 35/42 = **0,833**

b) Add meg a 95%-os CI-t a Wald-intervallum eljárással.

Számoljuk ki a SE-t:

$$SE \approx \sqrt{\frac{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{35}{42}\left(1-\frac{35}{42}\right)}{42}} = 0{,}00331$$

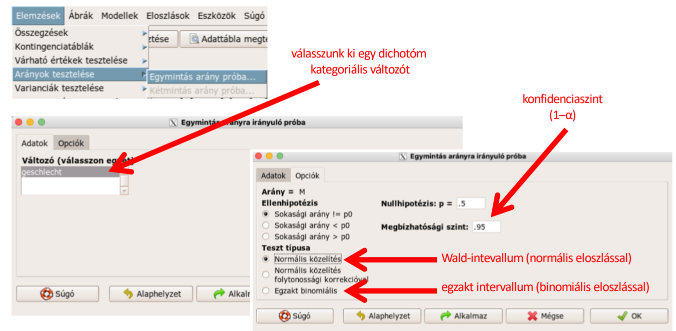
A 95%-os CI kb. $\hat{p}$ (Rh+) ± 2SE *között van, azaz* **0,833 ± 0,006** vagy **0,826 – 0,839** .

7. feladat: add meg a 95%-os konfidenciaintervallumot a kék szemszín prevalenciájára a gólyák közt, ha egy 10 hallgatóból álló mintában kettőnek volt kék a szeme.

Az ismert képlettel számolva: $\hat{p}$ (Rh+) = 0,200 és SE = 0,126. Ebből a következő 95%-os CI adódna: –0,052 – 0,452 . Azonban mivel valséget becslünk, a CI nem lóghat ki a [0,1] intervallumból; szélek nyesése után a CI: **0 – 0,452.** Itt a konfidenciaszint már biztos nem 95%-os. Ez csak egy példa, hogy mennyire megbízhatatlan a Wald-intervallum – de ennek ellenére szoktuk használni nem túl kis minták esetén, ha gyors becslésre van szükség.

Intervallumbecslés valségre

számolás R Commanderben: Milyen arányban vannak férfiak egy vizsgált egyetem első évfolyamán?



Intervallumbecslés valségre

számolás R Commanderben: Milyen arányban vannak férfiak egy vizsgált egyetem első évfolyamán?

```
Frequency counts (test is for first level):
geschlecht
  M   W
132 3[illegible]3

        1-sample proportions test without continuity correction

data:  rbind(.Table), null probability 0.5
X-squared = 67.221, df = 1, p-value = 2.428e-16
alternative hypothesis: true p is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
 0.2621201 0.3482176
sample estimates:
        p
0.3034483
```

férfiak száma a mintában

konfidenciaintervallum alsó és felső határa

férfiak aránya a mintában (pontbecslés)

Intervallumbecslés várható értékre

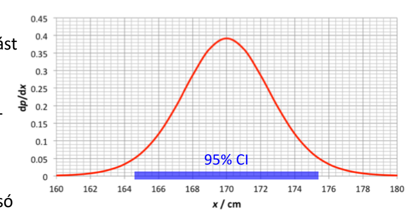
Student (W. S. Gosset)-féle t-eloszlást használva

Az arányokhoz hasonló intervallumokat lehet definiálni. Most azonban az n–1 szabadsági fokú (df) Student-féle t-eloszlást fogjuk használni.

Meghatározzuk a konfidenciaszintnek (1–α) megfelelő faktort (t-értéket). Ezzel megszorozzuk a $SE_{\text{átlag}}$-t. Ezt a szorzatot hozzáadva, illetve levonva az átlagból megkapjuk az intervallum felső, illetve alsó határát.

Felső határ: átlag + $t \cdot SE_{\text{átlag}}$

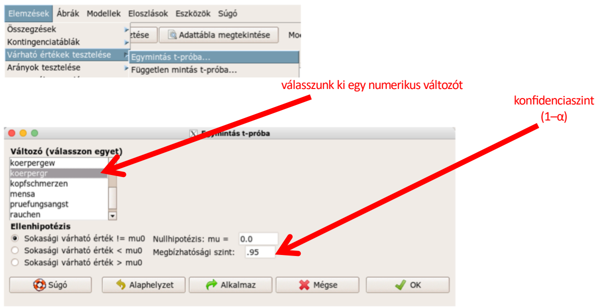
Alsó határ: átlag – $t \cdot SE_{\text{átlag}}$



Ábra: Az átlagok elméleti eloszlásának grafikonja (egy df = n–1 szabadsági fokú nem-standard t-eloszlás, melynek paraméterei: $\mu = \bar{x}$ és $\sigma = SE$) az 1. feladat alapján.

Intervallumbecslés várható értékre

számolás R Commanderben: Adjon intervallumbecslést 95%-os megbízhatósággal a hallgatók átlagos testmagasságára (cm-ben) egy vizsgált egyetem első évfolyamán!



Intervallumbecslés várható értékre

számolás R Commanderben: Adjon intervallumbecslést 95%-os megbízhatósággal a hallgatók átlagos testmagasságára (cm-ben) egy vizsgált egyetem első évfolyamán!

```
        One Sample t-test

data:  koerpergr
t = 375.35, df = 431, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 172.9196 174.7401
sample estimates:
mean of x
 173.8299
```

konfidenciaintervallum alsó és felső határa

mintaátlag (pontbecslés)

(Intervallumbecslés várható értékre)

8. feladat: Becslést szeretnénk adni a vérkoleszterinszint várható értékére és meg szeretnénk adni a becslés 95%-os CI-t. Nyolcelemű mintát vettünk, a megfigyelt értékek a táblázatban vannak.

megfigyelés sorszáma	koleszterin-szint (mg/dL)
1	174
2	161
3	139
4	168
5	143
6	149
7	120
8	169

A várható érték pontbecslése a mintaátlag:

$\mu \approx \bar{x}$ = **152,9 mg/dL**

Számoljuk ki a $SE_{átlag}$-t a már tanult módon:

$n = 8$

SD = 18,47 mg/dL

$SE_{átlag}$ = 6,53 mg/dL

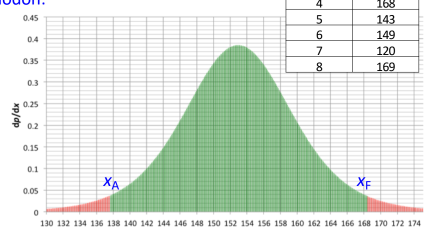
A mintaátlagok t-eloszlást követnek, a 95%-os CI határai:

$df = n - 1 = 7$

$t = 2{,}365$

$x_A = \bar{x} - t^* SE$ = **137,4 mg/dL**

$x_F = \bar{x} + t^* SE$ = **168,3 mg/dL**



Ábra: 95%-os konfidenciaintervallum (zölddel).

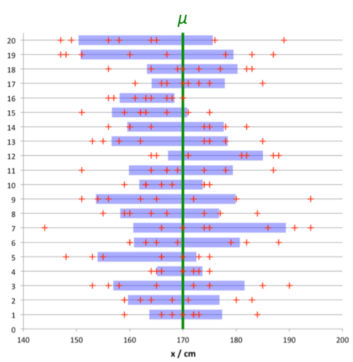
Intervallumbecslés

Konfidenciaszint (1 – α): annak a valószínűsége, hogy egy adott módszerrel meghatározott CI-ok tartalmazzák-e a becsült értéket.

Ebből nem tudjuk meg, hogy egy *konkrét* CI *ténylegesen* tartalmazza-e a becsült értéket.

Magát a becslési eljárást jellemzi általában, nem annak egy konrét eredményét. Azt nem tudjuk megmondani, hogy a becsült érték benne van-e az éppen kiszámolt CI-ban, csak akkor, ha valahonnan ismerjük a becsült értéket – mely esetben az egész becslésre nincs szükség.

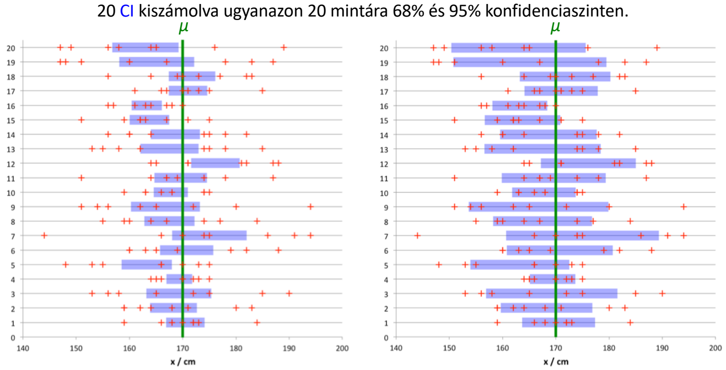
Szignifikanciaszint (α): a komplementer valség, pl. ha a konfidenciaszint 95%, akkor a szignifikanciaszint 5%. Hogy melyiket használjuk, az a kontextustól függ.



Ábra: A testmagasság várható értékre (μ) ugyanazon módszerel végzett 20 becslés szimulációja: 8-elemű minta vételezése (piros +), átlag és standard hibájának számítása, majd a CI megadása: *átlag* ± 2,36 × *SE* (kék sáv). A becsült értékek: μ = 170 cm, σ = 10 cm.

Intervallumbecslés

20 CI kiszámolva ugyanazon 20 mintára 68% és 95% konfidenciaszinten.



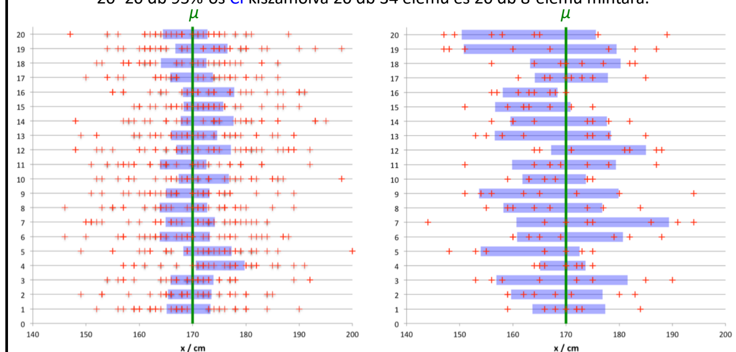
n = 8 (df = 7), μ = 170 cm, σ = 10 cm
$1 - \alpha$ = 68%

n = 8 (df = 7), μ = 170 cm, σ = 10 cm
$1 - \alpha$ = 95%

Magasabb konfidenciaszint =
kisebb valószínűséggel esik a CI-on kívül a becsült érték, de kevesebb az információtartalma.

Intervallumbecslés

20–20 db 95%-os CI kiszámolva 20 db 34 elemű és 20 db 8-elemű mintára.



n = 32 (df = 31), μ = 170 cm, σ = 10 cm
$1 - \alpha$ = 95%

n = 8 (df = 7), μ = 170 cm, σ = 10 cm
$1 - \alpha$ = 95%

Nagyobb mintaelemszám ugyanazon konfidenciaszinten = szűkebb CI.
(4-szeres elemszám átlagosan kb. fele szélességű CI-okat eredményez.)

Függelék: Normáltartomány

Normáltartomány, referenciatartomány vagy referenciaintervallum: a statisztikai változóra vonatkozó tartomány, mely a **változó egy elemét 95%-os valószínűséggel tartalmazza**.

A normáltartomány is egyfajta intervallumbecslés, de itt a statisztikai változó eloszlását, nem pedig eloszlásának egy paraméterét jellemezzük. Más szóval: a normáltartomány a magukra az adatokra vonatkozó 95%-os CI. Ezt a tartományt szokták feltüntetni az orvosi laborleleteken is.

TESTS	RESULT	FLAG	UNITS	REFERENCE INTERVAL	LAB
CMP12+LP+6AC+CBC/D/Plt+UA					
Chemistries					01
Glucose, Serum	80		mg/dL	65-99	01
Uric Acid, Serum	7.2		mg/dL	[illegible]	01
BUN	21		mg/dL	5-26	01
Creatinine, Serum	0.94		mg/dL	0.76-1.27	01
Glom Filt Rate, Est	>59		mL/min/1.73	>59	01
If African-American	>59		mL/min/1.73	>59	01
Note: Persistent reduction for 3 months or more in an eGFR <60 mL/min/1.73 m2 defines CKD. Patients with eGFR values >/=60 mL/min/1.73 m2 may also have CKD if evidence of persistent proteinuria is present. Additional information may be found at www.kdoqi.org.					
BUN/Creatinine Ratio	22			8-27	01
Sodium, Serum	142		mmol/L	135-145	01
Potassium, Serum	4.4		mmol/L	3.5-5.2	01
Chloride, Serum	100		mmol/L	97-108	01
Calcium, Serum	10.1		mg/dL	8.5-10.6	01
Phosphorus, Serum	3.9		mg/dL	2.5-4.5	01
Protein, Total, Serum	8.2		g/dL	6.0-8.5	01
Albumin, Serum	5.1		g/dL	3.5-5.5	01
Globulin, Total	3.1		g/dL	1.5-4.5	01
A/G Ratio	1.6			1.1-2.5	01
Bilirubin, Total	1.2		mg/dL	0.1-1.2	01
Bilirubin, Direct	0.20		mg/dL	0.00-0.40	01
Bilirubin, Indirect	**1.00**	**High**	mg/dL	0.10-0.80	01
Alkaline Phosphatase, S	70		IU/L	25-150	01
LDH	142		IU/L	100-250	01
AST (SGOT)	35		IU/L	0-40	01
GGT	**70**	**High**	IU/L	0-65	01
Iron, Serum	115		ug/dL	40-155	01

Normális eloszlású változó esetén a normáltartomány kb.: $\bar{x} \pm 2SD$.
(pontosabban: $\bar{x} \pm 1{,}96SD$)

9. feladat: Számold ki a szérum glükózszint μ, σ és σ^2 paramétereit a laborlelet adatainak segítségével.

$x_L = \mu - 2\sigma = 65$ mg/dL
$x_U = \mu + 2\sigma = 99$ mg/dL

$x_U - x_L = (\mu+2\sigma) - (\mu-2\sigma) = 4\sigma$
$\sigma = (x_U - x_L)/4 =$ **8,5 mg/dL**

$x_U + x_L = (\mu+2\sigma) + (\mu-2\sigma) = 2\mu$
$\mu = (x_U + x_L)/2 =$ **82 mg/dL**

$\sigma^2 =$ **72,25 (mg/dL)^2**